

IV JORNADAS DE CONSULTA MATEMÁTICA PARA EMPRESAS E INSTITUCIONES i-Math 2008-2011



**Editores: Alfredo Bermúdez de Castro, Jose Durany Castrillo,
Peregrina Quintela Estévez y Ana Belén Fernández Gómez**

23, 24 y 25 de Enero 2012

Facultad de Matemáticas. Campus Sur, Santiago de Compostela



IV JORNADAS DE CONSULTA MATEMÁTICA PARA EMPRESAS E INSTITUCIONES

Santiago de Compostela, 23-25 de Enero de 2012



Universidade de Vigo



Editores

Alfredo Bermúdez de Castro

Peregrina Quintela Estévez

Universidade de Santiago de Compostela

alfredo.bermudez@usc.es; peregrina.quintela@usc.es

Jose Durany Castrillo

Universidade de Vigo

durany@dma.uvigo.es

Ana Belén Fernández Gómez

Gestora de valoración del proyecto i-MATH

anabelen.fernandez@usc.es

Imprime: Unidixital, Casa Gradín, Baixo

Santiago de Compostela

Dep. legal: C 837-2012

Índice

Introducción	5
Recuperación selectiva de información	7
<i>Enrique De Miguel Ilarri, 2 Mares Demil</i>	
<i>José Antonio Vilar Fernández, Universidade da Coruña</i>	
Diseño de un sistema de trincaje en el transporte de láminas de granito	21
<i>Nicolás Troncoso, Vasco Gallega de Consignaciones (VGG)</i>	
<i>Peregrina Quintela Estévez, Universidade de Santiago de Compostela</i>	
Microwave thawing	35
<i>Julio César González, Teaxul</i>	
<i>Alfredo Bermúdez de Castro, Universidade de Santiago de Compostela</i>	
Agradecimientos	61

Introducción

Los días 23, 24 y 25 de Enero de 2012, el Nodo CESGA del proyecto Consolider i-MATH, organizó en Santiago de Compostela la cuarta edición de las **Jornadas de Consulta Matemática para Empresas e Instituciones. i-MATH 2008-2011.**

El objetivo de estas Jornadas es generar un espacio anual de encuentro entre empresas e instituciones y grupos de investigación del proyecto i-MATH de manera que se

- promocióne la Matemática en el entorno empresarial buscando activamente proyectos de investigación y desarrollo en donde la Matemática tenga una especial relevancia;
- intensifique la I+D entre los grupos de investigación del proyecto MATHEMATICA y los correspondientes a las industrias, en problemas susceptibles de ser tratados con métodos matemáticos, estadísticos o computacionales;
- actualice el mapa de demanda tecnológica.

En esta cuarta edición de las Jornadas (véase el enlace correspondiente en la página <http://mathematica.nodo.cesga.es/>) han participado como ponentes las empresas 2 Mares Demil, Vasco Gallega de Consignaciones (VGG) y Teaxul, pertenecientes a los sectores de Comunicaciones, Transporte y Pesca y Acuicultura, respectivamente. Cada uno de los ponentes empresariales presentó un problema susceptible de ser tratado mediante métodos matemáticos y/o estadísticos; en particular, las técnicas matemáticas utilizadas en su análisis fueron Modelización, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Operadores no Lineales, Ecuaciones de la Elasticidad Linealizada, Ecuaciones de Maxwell, Modelización Estadística, Clasificación Supervisada, y Simulación Numérica. Los problemas estudiados en estas Jornadas cubrieron campos diversos: Mecánica de Sólidos, Contacto entre Sólidos Elásticos, Transferencia de Calor, Cambio de Fase, Electromagnetismo, Ondas Planas, Microondas, Bases de Datos, Minería de Datos, Tratamiento de la Información y Diseño de nuevos Algoritmos. En las Jornadas han participado un total de 25 personas entre estudiantes, investigadores, profesores y técnicos de empresas que han contribuido a un mayor éxito de las mismas. Este libro presenta, para cada uno de los tres problemas industriales propuestos, una memoria resumen acerca de su planteamiento, su enfoque matemático y su resolución - si ésta ha podido ser completada - o una propuesta para la misma.

Finalmente, cabe subrayar que en esta cuarta edición de las Jornadas se

cumplieron los objetivos planteados por los organizadores: dar respuesta a las necesidades planteadas desde Industrias y Empresas utilizando herramientas matemáticas y/o estadísticas y promocionar así su uso en la industria, incrementar y fortalecer las relaciones entre las empresas y los grupos de investigación participantes, y abrir nuevas líneas de investigación hacia temas de interés para Empresas y Universidades. Todo ello hizo que la valoración general del evento por parte de los organizadores, los coordinadores académicos de los problemas, los ponentes de las empresas y los asistentes fuese sin duda globalmente positiva.

Santiago de Compostela, 30 de Marzo de 2012

Los Comités Científico y Organizador:

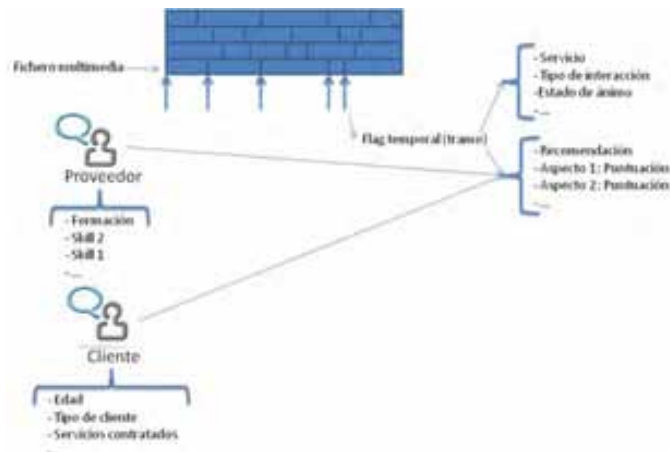
- Alfredo Bermúdez de Castro López Varela. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.
- Jose Durany Castrillo. Departamento de Matemática Aplicada II, Universidade de Vigo.
- Peregrina Quintela Estévez. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.
- Ana Belén Fernández Gómez. Gestora de valorización del proyecto i-MATH, Universidade de Santiago de Compostela.

Recuperación selectiva de información

Coordinador Académico José Antonio Vilar Fernández
Universidad o Centro Universidade da Coruña
E-mail jose.vilarf@udc.es

Representante de la Empresa Enrique De Miguel Ilarri
Empresa 2 Mares Demil
E-mail emi@2mares.com

Grupo de trabajo Marcos Gestal Pose (Universidade da Coruña), María José Ginzo Villamayor (Universidade de Santiago de Compostela), María José Lombardía Cortiña (Universidade da Coruña), Salvador Naya Fernández (Universidade da Coruña), Juan Ramón Rabuñal Dopico (Universidade da Coruña), Daniel Rivero Cebrián (Universidade da Coruña), Juan Manuel Vilar Fernández (Universidade da Coruña)



Recuperación selectiva de información

*José Antonio Vilar Fernández** *Enrique De Miguel Ilarri***

Resumen

En el presente documento se describe el problema de recuperación selectiva de información planteado por la empresa 2 Mares Demil, así como posibles estrategias de tratamiento de los datos para alcanzar una solución adecuada. Durante las jornadas, el equipo de trabajo abordó la modelización del problema, la identificación precisa de los objetivos buscados, la discusión de posibles vías de análisis de los datos y la formalización concreta de una metodología para la resolución del problema. El método es susceptible de ser implementado en una aplicación informática pero, para ello, sería deseable disponer de un conocimiento más preciso de la base de datos.

Palabras clave: Minería de datos; Clasificación supervisada; Técnicas de validación.

Clasificación por materia AMS: 62-07, 62H30, 68T05

1. Introducción

En líneas generales, el problema planteado por la empresa 2 Mares Demil tiene como objetivo básico la obtención de conocimiento sobre el comportamiento de un conjunto de variables integradas en una gran base de datos para, a partir de este proceso de aprendizaje, extraer información selectiva de la base de datos, de manera automatizada y sistemática. Esta problemática puede abordarse empleando técnicas estándar de minería de datos y, en particular, técnicas de modelización estadística y de clasificación supervisada.

Como en cualquier proyecto de minería de datos, a la fase inicial de definición del problema, deben añadirse las fases de diseño, elaboración y validación de un algoritmo de resolución. En este caso, al no tener acceso a la base de datos (o a un fragmento de la misma), las sesiones de trabajo se centraron en las fases de modelización y diseño de una metodología apropiada, incorporando distintas opciones de análisis y de evaluación posterior que, en general, serían de aplicación a diferentes tipo de variables. No fue posible

*E-mail: jose.vilarf@udc.es

**E-mail: emi@2mares.com

sin embargo completar la fase de elaboración de la herramienta y, por tanto, tampoco su validación.

Este documento recoge los aspectos fundamentales que se debatieron en las sesiones de trabajo y se ha estructurado en las siguientes secciones. En la Sección 2 se establece el problema en los términos planteados por la empresa. La Sección 3 presenta el enfoque del grupo de trabajo, asumiendo una estructura concreta para la base de datos, planteando que etapas debería incluir el algoritmo y refinando los objetivos a alcanzar. Una metodología específica se propone y detalla en la Sección 4 y, por último, se establecen las conclusiones finales en la Sección 5.

2. Planteamiento del problema por parte de la empresa

La empresa dispone de un conjunto de “contenidos multimedia”, ficheros tanto de audio como de video, divididos en diversos “tramos” identificados mediante flags temporales. Cada tramo se encuentra etiquetado con cierta información, de modo que cada archivo multimedia tiene asociado una tabla con información del tipo que se indica en el Cuadro 1.

Identificador del archivo multimedia: <input type="checkbox"/>		
TRAMO 1	TRAMO 2	
Identificador de tramo: <input type="checkbox"/>	Identificador de tramo: <input type="checkbox"/>	
Flag temporal: 0	Flag temporal: 1:05	
Servicio: Venta	Servicio: Reclamación	
Estado de ánimo: Enfadado	Estado de ánimo: Relajado	...
Tipo de interacción: Solicitud de baja	Tipo de interacción: Cierre de venta	
Parámetro 4: Valor A / ... / Valor Z	Parámetro 4: Valor A / ... / Valor Z	
⋮	⋮	
Parámetro n : Valor A / ... / Valor Z	Parámetro n : Valor A / ... / Valor Z	

Cuadro 1: Esquema de la tabla de información asociada al conjunto de tramos conformando un archivo multimedia. Fuente: 2 Mares Demil.

Se dispone también de una serie de tablas almacenando información relativa a los usuarios del sistema que, según el tipo de usuario, son clasificados como “Clientes” o “Proveedores”. Del tipo de usuario Cliente se maneja información como la edad, tipo de cliente, servicios contratados, y otras características que definen su perfil de cliente. De manera similar, el perfil del usuario Proveedor se define en base a su formación y niveles de diferentes destrezas. El Cuadro 2 esquematiza esta tabla de información adicional.

Cada tramo puede ser evaluado tanto por el proveedor como por el cliente. Se evalúan diferentes aspectos del tramo y se solicita una recomendación del usuario, obteniendo así una última tabla de información relevante sobre el

Identificador de usuario: <input type="checkbox"/>	Identificador de usuario: <input type="checkbox"/>
Tipo de usuario: Cliente	Tipo de usuario: Proveedor
Edad: 26	Formación: Experto
Servicios contratados: ADSL	
Característica 1: Valor A / ... / Valor Z	Destreza 1: Valor A / ... / Valor Z
⋮	⋮
Característica <i>n</i> : Valor A / ... / Valor Z	Destreza <i>n</i> : Valor A / ... / Valor Z

Cuadro 2: Esquema de la tabla de información definiendo el perfil de un usuario de un archivo multimedia, según sea Cliente (columna de la izquierda) o Proveedor (columna de la derecha). Fuente: 2 Mares Demil.

archivo multimedia (ver Cuadro 3).

Identificador de archivo multimedia: <input type="checkbox"/>
Identificador de tramo: <input type="checkbox"/>
Identificador de usuario: <input type="checkbox"/>
Atención: Educado
Recomendación: Valor A / ... / Valor Z
Aspecto 1: Valor A / ... / Valor Z
⋮
Aspecto <i>n</i> : Valor A / ... / Valor Z

Cuadro 3: Esquema de la tabla de información relativa a la evaluación de un tramo por parte de un usuario en un archivo multimedia. Fuente: 2 Mares Demil.

En definitiva, las tablas de información descritas configuran un escenario como el que se describe en la Figura 1.

En este contexto, la empresa desea obtener un algoritmo que, en base a las tablas de información mencionadas, identifique y seleccione un conjunto reducido de tramos que caractericen un comportamiento o situación establecidos de antemano. A modo ilustrativo, la empresa incluye en su planteamiento el ejemplo que sigue.

Identificar aquellos tramos que mejor definan o expliquen porqué se ha producido un determinado tipo de interacción (darse de baja, devolución factura, ...) para un determinado perfil de Clientes (mayor de 40 años, determinados servicios contratados, ...).

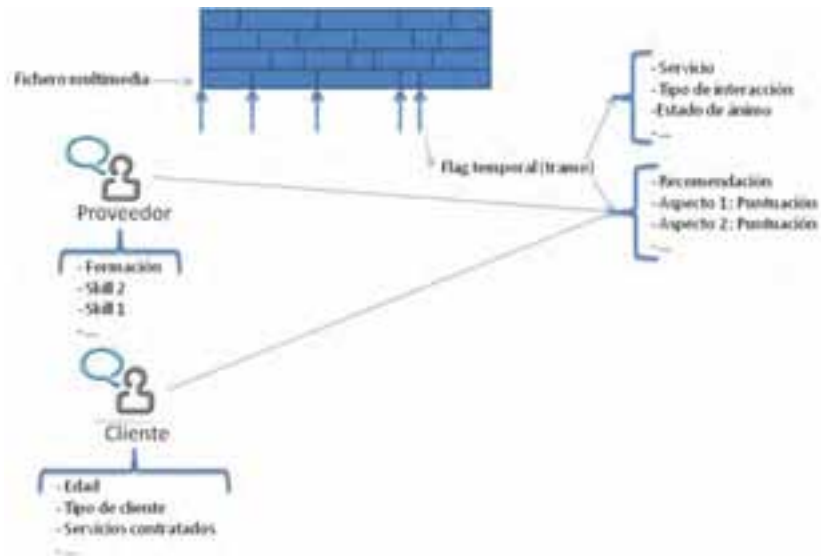


Figura 1: Escenario de trabajo. Fuente: 2 Mares Demil.

3. Enfoque del problema por parte del grupo de trabajo

3.1. Base de datos

La descripción de las tablas de información en la sección previa deja abiertas bastantes posibilidades que pueden tener un peso importante en el tratamiento estadístico a realizar. Por ejemplo, algunos de los interrogantes que se plantearon en el grupo de trabajo fueron: >se evalúan todos los tramos?, >puede un mismo usuario evaluar tramos de archivos diferentes?, >qué tipo de respuesta (cualitativa, cuantitativa) tienen variables como las destrezas o las características?, >cabe la posibilidad de encontrarse un número elevado de datos faltantes? (intuimos que sí), >a qué dimensión de tablas nos enfrentamos?, >los aspectos que se solicita evaluar a un cliente coinciden con los que evalúa un proveedor? (asumimos que sí) ... Una respuesta precisa a este tipo de preguntas ayudaría a estructurar adecuadamente la base de datos y a anticiparse a problemas de aplicación del algoritmo que se diseñe.

Buscando simplificar el problema, se opta por caracterizar la base de datos como una única tabla de doble entrada donde cada fila representa un tramo específico y cada columna los valores de una variable a lo largo de los tramos. Específicamente, sean A el número de archivos multimedia y N_i el número de tramos del i -ésimo archivo. Entonces la base de datos está dada por el conjunto:

$$\Omega = \left\{ \Omega_{ij} = \left(\vec{C}_i, \vec{P}_{ij}, \vec{L}_{ij}, \vec{E}_{ij}^c, \vec{E}_{ij}^p \right); i = 1, \dots, A; j = 1, \dots, N_i \right\}$$

donde el j -ésimo tramo del i -ésimo archivo, Ω_{ij} , está caracterizado por 5 vectores:

- $\vec{C}_i = (e_i, sc_i, cc_i^1, \dots, cc_i^n)$ (perfil Cliente, primera columna del Cuadro 2).
- $\vec{P}_{ij} = (f_{ij}, d_{ij}^1, \dots, d_{ij}^n)$ (perfil Proveedor, segunda columna del Cuadro 2).
- $\vec{L}_{ij} = (t_{ij}, s_{ij}, m_{ij}, x_{ij}, l_{ij}^1, \dots, l_{ij}^n)$ (etiquetas tramo, Cuadro 1).
- $\vec{E}_{ij}^c = (ec_{ij}^1, \dots, ec_{ij}^n)$ (evaluación de tramo por Cliente, Cuadro 3 para Cliente).
- $\vec{E}_{ij}^p = (ep_{ij}^1, \dots, ep_{ij}^n)$ (evaluación de tramo por Proveedor, Cuadro 3 para Proveedor).

Con esta notación, el Ejemplo 2 plantea seleccionar un conjunto pequeño de tramos Ω_{ij} para los que la variable x_{ij} , tipo de interacción, muestre un comportamiento lo más similar posible al que tiene sobre la totalidad de tramos correspondientes a un determinado tipo de clientes, i.e. sobre un subconjunto de la base de datos $\Omega_1 \subset \Omega$ donde los vectores \vec{C}_i satisfacen alguna restricción establecida de antemano (p.e. $e_i > 40$ y $sc_i = \text{"ADSL"}$).

3.2. Planteamiento general del algoritmo de recuperación selectiva de la información

Establecido conceptualmente el formato de la base de datos y, de acuerdo con los requerimientos de la empresa, el algoritmo de recuperación selectiva de la información debería incluir las siguientes etapas:

Etapas 1: El usuario fija el valor de algunas variables.

Etapas 2: El usuario establece la problemática que debe ser tratada en base a la conducta de un conjunto de variables de interés.

Etapas 3: El algoritmo proporciona como salida una lista con los identificadores de tramo más relevantes para describir la problemática planteada en términos de las variables de interés.

La **Etapas 1** supone, en definitiva, filtrar la base de datos seleccionando un subconjunto de tramos Ω_1 donde centrar el estudio. La **Etapas 2** define la situación en estudio, que vendrá caracterizada por el comportamiento de algunas variables de la base de datos. La **Etapas 3** es sustancial para la empresa, que ha insistido en que el listado de tramos "solución" es el objetivo básico del algoritmo.

3.3. Objetivos

El grupo de trabajo considera que, además de proporcionar el listado de la **Etapa 3**, el algoritmo debería alcanzar otros objetivos que ayudasen a entender el comportamiento de las variables de interés. Específicamente, son metas a alcanzar por el algoritmo las que siguen.

Objetivo 1: Modelización del comportamiento de las variables de interés y estudio de relaciones entre ellas.

Objetivo 2: Clasificación supervisada de tramos.

Objetivo 3: Selección de un conjunto reducido de tramos.

Alcanzar el **Objetivo 1** permitirá: conocer el grado de separabilidad de los tramos y, por tanto, la representatividad de algún conjunto de ellos; explorar la estructura de correlación entre las variables de interés; evaluar la posibilidad de reducir la dimensión del conjunto de variables (opción probablemente muy recomendable dado el elevado número de variables); analizar la presencia de datos faltantes y la posible imputación de los mismos, . . . En definitiva, obtener un conocimiento profundo del comportamiento de las variables en estudio. En el grupo de trabajo existe de hecho la percepción de que probablemente este objetivo pueda ser más clarificador que el **Objetivo 3**.

El **Objetivo 2** es necesariamente un paso previo a la selección de tramos relevantes. Las técnicas de clasificación supervisada permitirán clasificar los tramos en grupos diferentes en base a la información de variables de interés pero, lo que es más importante todavía, proporcionarán “puntuaciones” para cada tramo de acuerdo con su nivel de adecuación al grupo asignado. Estas puntuaciones establecen un ranking entre los tramos que conduce de modo automático a la selección de tramos relevantes perseguida en el **Objetivo 3**. El grupo de trabajo plantea el proceso de clasificación supervisada de acuerdo a dos posibles enfoques que serán explicados en la Sección 4.

4. Metodología

Conforme al planteamiento de la Sección 3.2 y al listado de objetivos establecido en la Sección 3.3, se propone el diseño de un algoritmo basado en el esquema que sigue.

Paso 1. Selección de variables y valores de las mismas que caracterizan el filtrado.

Paso 2. Determinación de las variables objeto de estudio.

Paso 3. Análisis estadístico exploratorio de las variables sobre los dos subconjuntos generados en el **Paso 1**.

Paso 4. Clasificación de los tramos.

Paso 5. Selección de un conjunto reducido de tramos.

Paso 6. Validación de resultados.

Algunas cuestiones relevantes de este método son tratadas en las subsecciones que siguen.

4.1. Selección de variables

En los dos primeros pasos el usuario facilita al algoritmo las variables de filtrado (**Paso 1**) y las variables de interés para el análisis **Paso 2**. Para las primeras se establece un conjunto de restricciones que suponen filtrar el conjunto de tramos Ω , estableciendo una partición del mismo en dos subconjuntos Ω_1 y Ω_2 , donde Ω_1 aglutina los tramos que satisfacen las restricciones. Las variables fijadas por el usuario en el **Paso 2** son las variables objetos de estudio, ya que la clasificación y selección de tramos estará basada en su comportamiento.

4.2. Análisis estadístico exploratorio de las variables sobre los dos subconjuntos generados

Se completa un análisis estadístico de carácter exploratorio para las variables seleccionadas en el **Paso 2** sobre los dos subconjuntos generados por el filtrado, Ω_1 y Ω_2 . Se pretende modelizar la conducta de estas variables en cada subconjunto y, usando técnicas de inferencia estadística, chequear por diferencias significativas en los dos subconjuntos. Nótese que es importante conocer el comportamiento de las variables también en Ω_2 y no sólo en el conjunto de tramos filtrados. Como ya se ha indicado previamente, este paso permitirá también explorar la existencia de correlaciones, reducir la dimensión del problema usando análisis de componentes principales, identificar atípicos, detectar datos faltantes, etc. Las técnicas de análisis estadístico están aquí obviamente condicionadas por el tipo de variables consideradas, resultando fundamental tener esta información para indicar al algoritmo los procedimientos a emplear.

4.3. Clasificación de los tramos

En el **Paso 4** del algoritmo se emplearían técnicas de clasificación supervisada (ver p.e. Ref. [1]) para agrupar los tramos en diferentes clases o grupos, de modo que las variables de interés presenten un comportamiento similar sobre todos los tramos de un mismo grupo. Se trata de clasificación “supervisada” porque son conocidos de antemano los grupos de interés y el grupo al que pertenece cada tramo. Precisamente este hecho permite “entrenar” el método de clasificación elegido para obtener la *regla de clasificación*

o *clasificador* más apropiado. Además, este clasificador proporciona a cada tramo un conjunto de puntuaciones o *scorings* que miden el grado de adecuación del tramo a cada grupo. Se establece de esta forma un ranking que se usará en el siguiente paso del algoritmo para seleccionar los tramos más representativos de cada grupo.

El grupo de trabajo ha considerado dos enfoques diferentes para realizar la clasificación de los tramos:

Enfoque 1. Clasificar los tramos en Ω_1 o en Ω_2 en función del comportamiento de las variables de interés en ambos subconjuntos de Ω .

Enfoque 2. Clasificar los tramos de Ω_1 en grupos determinados por el rango de valores de alguna de las variables de interés, de acuerdo con el comportamiento del resto (o de un subconjunto del resto) de las variables de interés.

Para ilustrar lo que se persigue con ambos enfoques, retomamos el escenario propuesto en el Ejemplo 2 y abordamos la clasificación de tramos en ese ejemplo.

Bajo el **Enfoque 1** la clasificación de tramos se realizaría como sigue.

1. El filtro del conjunto de tramos lo determinan las restricciones sobre las variables “edad” (mayores de 40) y “servicios contratados” (ADSL). Por tanto los subconjuntos Ω_1 y Ω_2 están dados por:

$$\Omega_1 = \{\Omega_{ij} / \{e_i > 40\} \cap \{sc_i = \text{“ADSL”}\}\}, \quad \Omega_2 = \Omega - \Omega_1.$$

2. Las variables de interés en las que basar la clasificación son x_{ij} = “tipo de interacción” y \vec{E}_{ij}^c = “evaluación del tramo por el cliente”.
3. El objetivo es obtener un clasificador que asigne un tramo arbitrario Ω_{ij} a Ω_1 o a Ω_2 en base a sus valores en las variables x_{ij} y \vec{E}_{ij}^c .

Como técnica de clasificación podría considerarse un modelo de regresión logística, con variables explicativas x_{ij} y \vec{E}_{ij}^c , y estimar así la probabilidad

$$p_{ij} = P\left(Z = 1 \mid \left(x_{ij}, \vec{E}_{ij}^c\right)\right), \quad (1)$$

siendo Z la variable filtro dada por $Z = 1$ si el tramo $\Omega_{ij} \in \Omega_1$ y $Z = 0$ en otro caso.

Cada tramo Ω_{ij} tendrá asignado entonces una puntuación p_{ij} estimando la probabilidad de su pertenencia a Ω_1 condicionada a sus valores en x_{ij} y \vec{E}_{ij}^c .

La clasificación de tramos bajo el **Enfoque 2** sería como sigue.

1. Sean Ω_1 y Ω_2 como en el Ejemplo 4.3. Con este nuevo enfoque, la clasificación se realizará inicialmente con los tramos de Ω_1 .
2. Las variables de interés se dividen ahora en dos conjuntos. Un primer conjunto de variables, digamos variables *respuesta*, establecen los grupos en que se clasificarán los tramos y el resto (o un subconjunto de ellas), digamos variables *explicativas*, definen el criterio en qué basar la clasificación. Supondremos por ejemplo que la variable “tipo de interacción”, x_{ij} , determina los grupos y que el vector de variables “evaluación del tramo por el cliente”, \vec{E}_{ij}^c , son las variables explicativas.
3. El objetivo es ahora separar los tramos del conjunto filtrado según los valores del tipo de interacción que le corresponden en base a la evaluación recibida por el cliente. Como en el Ejemplo 4.3, una opción es ajustar un modelo de regresión logística (multilogit en este caso por tratarse de más de dos grupos) con variable explicativa \vec{E}_{ij}^c y respuesta x_{ij} . De este modo se estima la probabilidad, p_{ij}^k , de que el tramo x_{ij} pertenezca a la k -ésima categoría de x_{ij} :

$$p_{ij}^k = P\left(x_{ij} = k | \vec{E}_{ij}^c\right). \quad (2)$$

El primer enfoque es informativo para la empresa porque muestra que valores de las variables de interés conducen a una alta o baja probabilidad de que el tramo pertenezca al conjunto filtrado Ω_1 . En términos del ejemplo, la regresión logística permitiría explorar que valores del tipo de interacción y la evaluación del cliente hacen más probable que se trate de un cliente de más de 40 años y con ADSL como servicios contratados.

El segundo enfoque tiene un valor añadido al modelizar el comportamiento de un conjunto de variables de interés en función del resto. Así, en el Ejemplo 4.3 se dispondría de un modelo estimado del tipo:

$$p_{ij}^k = \frac{\exp\left(\nu_0^k + \sum_{l=1}^n \nu_l^k ec_{ij}^l\right)}{1 + \sum_{s \neq k} \exp\left(-\nu_0^s - \sum_{l=1}^n \nu_l^s ec_{ij}^l\right)},$$

útil para predecir el tipo de interacción en un tramo de Ω_1 basándose en los resultados de la evaluación del cliente. Además, clasificando cada tramo en la categoría k de x_{ij} donde se maximiza la probabilidad estimada p_{ij}^k , se dispondrá también de una aproximación a la distribución de x_{ij} sobre Ω_1 , lo cuál también es informativo para la empresa.

Aunque en los ejemplos previos la clasificación de tramos se ilustra considerando discriminación logística, existe un amplio abanico de técnicas en minería de datos para realizar clasificación supervisada. Entre otras:

- Los métodos clásicos de discriminación lineal (LDA) y discriminación cuadrática (QDA).

- La clasificación basada en algoritmos de vecindad, como el método de los k vecinos más próximos (**kNN**).
- Algoritmos basados en la regla de Bayes, como el clasificador **Bayes Naive**.
- Métodos basados en árboles de clasificación, como el algoritmo **CART**.
- Clasificación basada en el uso de redes neuronales artificiales (**ANN**).
- Algoritmos de clasificación basados en máquinas de soporte vectorial (**SVM**).

Una interesante descripción de estos procedimientos puede verse en Ref. [1] y en monografías sobre Minería de Datos como Ref. [2, 3] y las referencias allí incluidas. Un estudio previo de las variables formando la base de datos es aconsejable para, en particular, saber que procedimientos serían más adecuados. En cualquier caso, el algoritmo debería incluir varios de estos procedimientos. Cabe enfatizar que todos ellos pueden ser fácilmente implementados usando el entorno R de software libre (de hecho existen ya librerías en R para muchos de ellos, ver Ref. [4]).

4.4. Selección de un conjunto reducido de tramos

Cualquiera de los procedimientos de clasificación mencionados genera puntuaciones para los tramos, creando una ordenación de los mismos en base al peso con que cada tramo es clasificado en el grupo correspondiente. La selección de un número reducido r de tramos representativo de cada grupo podría realizarse entonces eligiendo los r tramos con puntuación más elevada dentro de ese grupo.

En este apartado el grupo de trabajo debate sobre si seleccionar un grupo reducido de tramos resultará realmente eficiente. En primer lugar obsérvese que es importante determinar el número r de tramos que deben ser seleccionados. Si se busca un conjunto de tramos ciertamente “representativo”, el número de tramos seleccionados difícilmente podrá ser bajo cuando las variables muestren una elevada variabilidad. Más aún, el algoritmo debería recibir este número r como un parámetro de entrada y, por tanto, estaría prefijado de antemano y con carácter automático. Por otro lado, podría darse el caso de que las puntuaciones más altas se correspondiesen con tramos con idénticos valores de las variables. En tal caso la empresa debe valorar si resulta más interesante seleccionar tramos diferentes pero con idénticos atributos o tramos mostrando variabilidad en sus respuestas. Tomada la decisión, cualquiera de las dos opciones es desde luego fácil de implementar en el algoritmo.

4.5. Validación de resultados

Con independencia de las técnicas de clasificación empleadas, la validación del algoritmo puede realizarse estimando las probabilidades de mala clasificación mediante la construcción de una matriz de confusión. Se utilizarían procedimientos de validación cruzada, bien dejando un tramo fuera o por selección al azar de muestras entrenamiento y de muestras test. En cualquier caso es altamente recomendable entrenar el algoritmo con la base de datos real o con un subconjunto de la misma.

5. Conclusiones

El problema planteado por la empresa 2 Mares Demil puede abordarse mediante el uso de técnicas estadísticas y de minería de datos. Se requiere la implementación de un algoritmo que conduzca a la recuperación selectiva de información desde una gran base de datos. La generalidad de las variables que forman esta base de datos obliga a que el algoritmo incluya diferentes técnicas de análisis, de modo que la eficiencia del algoritmo se mejoraría si se concretan y conocen en detalle las variables a considerar.

En este contexto, el grupo de trabajo ha planteado una posible estructura para el algoritmo, ha refinado los objetivos que se podrían alcanzar, y ha propuesto una metodología con enfoques complementarios para resolver el problema planteado en su generalidad. En particular, el método proporciona una solución concreta al principal objetivo de la empresa: la selección de un número reducido de tramos representativos en una situación dada. Se propone también una vía precisa para la validación final del algoritmo, al tiempo que se anticipan las posibles dificultades que podrían surgir en la aplicación práctica del algoritmo.

La implementación de la herramienta no sería compleja y podría realizarse en su totalidad usando el entorno R de software libre, lo que permitiría aprovechar diversas librerías.

Referencias

- [1] T. Hastie et al. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer Series in Statistics, 2nd ed. (2009).
- [2] A.J. Izenman *Modern Multivariate Statistical Techniques. Regression, Classification, and Manifold Learning*. Springer Texts in Statistics (2008).
- [3] M. Kantardzic *Data mining: concepts, models, methods and algorithms*. Wiley-IEEE Press, 2nd. ed. (2011).

- [4] L. Torgo *Data Mining with R: Learning with Case Studies*. Chapman & Hall/CRC Data Mining and Knowledge Discovery Series, Chapman & Hall/CRC, (2010).

Diseño de un sistema de trincaje en el transporte de láminas de granito

Coordinador Académico Peregrina Quintela
Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela
E-mail peregrina.quintela@usc.es

Representante de la Empresa Nicolás Troncoso
Empresa Vasco Gallega de Consignaciones (VGG)
E-mail ntroncoso@vascogallega.com

Grupo de trabajo Patricia Barral (Univ. de Santiago), María Teresa Cao (Univ. de Vigo), Rubén A. Gayoso (ITMATI), Carlos Moreno (UNED), Ángel Rial (Univ. de Santiago)



Diseño de un sistema de trincaje en el transporte de láminas de granito

Patricia Barral^{*} Peregrina Quintela^{**} Nicolás Troncoso^{***}

Resumen

En este documento se recoge el problema presentado por la empresa VGG, que consiste en diseñar un sistema de trincaje que permita sujetar correctamente las láminas de granito para su transporte en contenedores por vía marítima. Durante las jornadas se estudió la modelización matemática del problema y se realizó la simulación numérica de un problema simplificado.

Palabras clave: elasticidad, contacto, fricción.

Clasificación por materia AMS: 74B05

1. Planteamiento del problema por parte de la empresa

Los contenedores utilizados para el transporte por vía marítima cuentan con dos sistemas de anclaje: anillas y pins, tal y como se puede ver en el esquema de la figura 1. La figura 2 muestra cómo las láminas de granito se agrupan y sujetan con estructuras de madera, formando un conjunto denominado *bundle*.

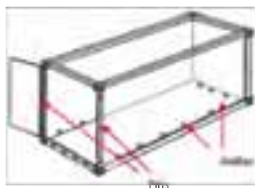


Figura 1: Contenedor



Figura 2: *Bundle* de granito

Los *bundles* se sujetan a las anillas y pins de los contenedores utilizando eslingas y tensores como los mostrados en las figuras 3 y 4.

^{*}E-mail: patricia.barral@usc.es

^{**}E-mail: peregrina.quintela@usc.es

^{***}E-mail: ntroncoso@vascogallega.com



Figura 3: Eslinga



Figura 4: Tensores

Actualmente estos *bundles* se protegen de los golpes en el contenedor mediante un sistema de carpintería (ver figura 5). Este procedimiento es excesivamente lento, laborioso y costoso. Además, el trincaje no es efectivo y en ocasiones se producen daños en la mercancía.



Figura 5: Colocación de los *bundles*

En una primera etapa la empresa propone mejorar el sistema de trincaje para sujetar los bundles pero manteniendo estos para proteger las láminas de granito en las etapas de carga y descarga.

2. Modelo Matemático

2.1. Dominio de cálculo

Cada *bundle* consta de varias láminas de granito que se consideran como un único bloque. Denotaremos por $\Omega_{gr} = \cup_{i=1}^8 \Omega_{gr_i}$ el conjunto de ocho *bundles*, que se colocan en el contenedor siguiendo el esquema de la Figura 6. Se consideran varias eslingas sujetando cada uno de estos *bundles*. El conjunto de eslingas se denotará por Ω_{es} .

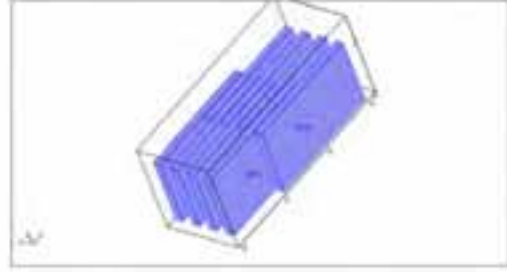


Figura 6: Esquema de colocación de lod *bundles* en el contenedor.

2.2. Ecuación de equilibrio

Las variables a calcular son el desplazamiento $\mathbf{u} = (u_i)$, $1 \leq i \leq 3$, y el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$, que sufre cada punto del granito y de las eslingas.

Se asume la hipótesis de **pequeños desplazamientos**[2], según la cual el tensor linealizado de deformación

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T),$$

es una buena aproximación del tensor de Green-St Venant:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}).$$

La ecuación de equilibrio[2] se expresa del siguiente modo:

$$-\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f} \text{ en } \Omega_{gr} \cup \Omega_{es},$$

siendo \mathbf{f} la densidad de fuerzas de volumen aplicadas.

2.2.1. Cargas aplicadas

Se consideran las cargas derivadas de la gravedad para los siguientes valores de la densidad:

$$\rho = \begin{cases} 3000 \text{ Kg/m}^3 & \text{sobre el granito,} \\ 200 \text{ Kg/m}^3 & \text{sobre las eslingas.} \end{cases}$$

Así, la densidad de fuerzas de volumen que se considera es:

$$\mathbf{f} = (0, 0, -\rho g).$$

De acuerdo con las normas ISO de la IMO (Organización Marítima Internacional) las condiciones de navegación que deben resistir los *bundles* de granito durante el transporte son:

- Aceleración Transversal: $0.8g$
- Aceleración Longitudinal: $0.4g$
- Aceleración Vertical: $1g$

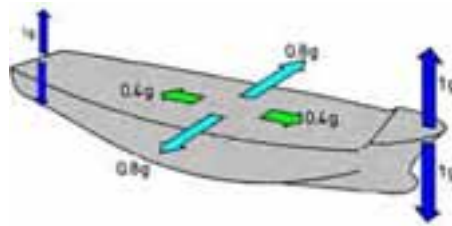


Figura 7: Esquema de las condiciones de navegación

Por tanto, se deben incorporar las fuerzas de aceleración debidas a las condiciones de navegación en cada ensayo, tanto para el granito, como para las eslingas. Para ello se tendrán que simular los siguientes casos:

- **Caso I: aceleración longitudinal.** Se considerarán dos posibilidades: $0.4g$ y $0.8g$ en sentido longitudinal.
- **Caso II: aceleración transversal.** Se considerará $0.8g$ en sentido transversal, primero sin aceleración en sentido vertical y, en el siguiente ensayo, con $1g$ en sentido vertical.

2.2.2. Ley de comportamiento

Se supone que el material es elástico lineal[1]:

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u})) I + 2\mu \varepsilon(\mathbf{u}),$$

siendo λ y μ los parámetros de Lamé del material. Ambos están relacionados con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson por las relaciones:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}.$$

En particular, se consideran los siguientes parámetros para el granito y la eslinga:

$$E_{gr} = 5.10^{10} \text{N/m}^2, \quad \nu_{gr} = 0.3.$$

$$E_{es} = 6.3 \cdot 10^9 \text{N/m}^2, \quad \nu_{es} = 0.33.$$

Para modelar la pretensión de las eslingas se considera una tensión residual inicial de $500N$ en la dirección tangencial correspondiente al eje longitudinal de la eslinga, que denotamos \mathbf{t}_1 .

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}_0 + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \text{ en } \Omega_{es}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{n} = 500 \mathbf{t}_1 \text{ sobre } \partial\Omega_{es}. \quad (2)$$

2.3. Condiciones de contorno

Se considera una **condición de contacto con fricción**, formulada como *ley de Coulomb* [3, 4] entre el granito y las eslingas y, también, en la superficie de apoyo del *bundle* sobre el suelo. Sean $\boldsymbol{\sigma}_t$ y σ_n la tensión tangencial y normal respectivamente, y \mathbf{u}_t , u_n , las componentes tangencial y normal del desplazamiento. Se verifica que $u_n \leq 0$ y

- si $u_n < 0$ no hay contacto y, por tanto, $\sigma_n = 0$;
- si $u_n = 0$ hay contacto y, en consecuencia, $\sigma_n < 0$.

En cualquier caso se verifica que $\sigma_n u_n = 0$. Para tener en cuenta el rozamiento se considera que $|\boldsymbol{\sigma}_t| \leq \mu_f |\sigma_n|$, siendo μ_f el coeficiente de rozamiento, de modo que:

- si $|\boldsymbol{\sigma}_t| < \mu_f |\sigma_n|$ no hay deslizamiento y, por tanto, $\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$;
- si $|\boldsymbol{\sigma}_t| = \mu_f |\sigma_n|$ hay deslizamiento y, por tanto, $\exists \gamma \geq 0; \mathbf{u}_t = -\gamma \boldsymbol{\sigma}_t$.

Para ello se considerarán los coeficientes de rozamiento proporcionados por la empresa, en particular, $\mu_f = 0.9$ entre la eslinga y el granito.

Las demás superficies exteriores se suponen libres de fuerzas

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre las demás superficies exteriores.}$$

Observación: Dadas las características de los ensayos no es posible considerar modelos 2D simplificados, como podría ser deformaciones planas, tensiones planas o axisimétricos. Sin embargo, se intentará, en la medida de lo posible, restringir los desplazamientos del *bundle* como desplazamientos rígidos, aprovechando las características de cada ensayo.

3. Submodelo analizado durante las Jornadas

Puesto que durante la celebración de las Jornadas se disponía de un tiempo muy reducido para abordar el problema, se consideró un problema simplificado sobre un único *bundle* sujeto por dos eslingas (ver figura 8), con vistas a analizar la capacidad de la simulación numérica para dar respuesta a este tipo de problemas. En este submodelo se asumen las siguientes simplificaciones:

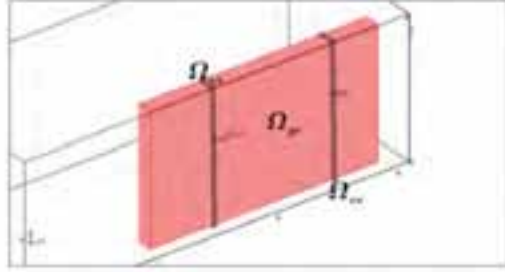


Figura 8: Dominio de cálculo simplificado

- Se considera un único bloque:

$$\Omega_{gr} = [2, 5.8] \times [0.05, 0.30] \times [0, 2.1].$$

- Se consideran dos eslingas situadas en $x = 3\text{m}$ y $x = 5\text{m}$. Las eslingas se consideran de ancho 0.05m y de espesor 0.01m .
- Por simplicidad, para tener en cuenta la pretensión de las eslingas, se sustituye la formulación (1)-(2) por una fuerza de superficie total de 500N en la dirección $-\mathbf{e}_z$ en los puntos de anclaje a las anillas:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ sobre } S_{\text{eslinga_anilla}},$$

siendo $S_{\text{eslinga_anilla}}$ la superficie de anclaje a las anillas y \mathbf{h} la densidad de fuerzas de superficie aplicadas:

$$\mathbf{h} = -\frac{500}{\text{Area}(S_{\text{eslinga_anilla}})}\mathbf{e}_z.$$

- También para simplificar, se considera una condición de contacto sin rozamiento (condición de Signorini[3]) entre el bloque y las eslingas. Por tanto, en estas fronteras se supone que $\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{0}$.
- Para reducir las no linealidades del problema se sustituye la condición de contacto con fricción entre el *bundle* y el suelo por una condición de deslizamiento: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.
- Para considerar el anclaje al suelo se considera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre dos puntos de anclaje a las anillas en cada eslinga.}$$

- Se supone que el resto de las superficies exteriores está libre de fuerzas:

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre las demás superficies exteriores.}$$

Resumen, el problema simulado en las IV Jornadas de Consulta fue:

Encontrar el desplazamiento \mathbf{u} y el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$, tales que:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f} \text{ en } \Omega_{gr} \cup \Omega_{es}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \text{ en } \Omega_{gr} \cup \Omega_{es}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) I + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \text{ en } \Omega_{gr} \cup \Omega_{es}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ sobre } S_{\text{eslinga_anilla}}, \\ u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n \sigma_n = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{t} = \mathbf{0} \text{ sobre las fronteras de contacto eslinga-granito,} \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sobre dos puntos de anclaje a las anillas de cada eslinga,} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre las demás superficies exteriores.} \end{array} \right.$$

Observación: Para reducir el tiempo computacional se restringieron los desplazamientos del granito aprovechando las características de cada ensayo: por ejemplo, en el ensayo con aceleración transversal y vertical, se anulaban los desplazamientos en la dirección longitudinal.

4. Resultados de la Simulación

El problema simplificado se resolvió durante las IV Jornadas de Consulta con COMSOL Multiphysics para las distintas condiciones de navegación. En las siguientes figuras se muestran los resultados para cada uno de los casos considerados.

Caso I:

I.1 Aceleración longitudinal 0.4g

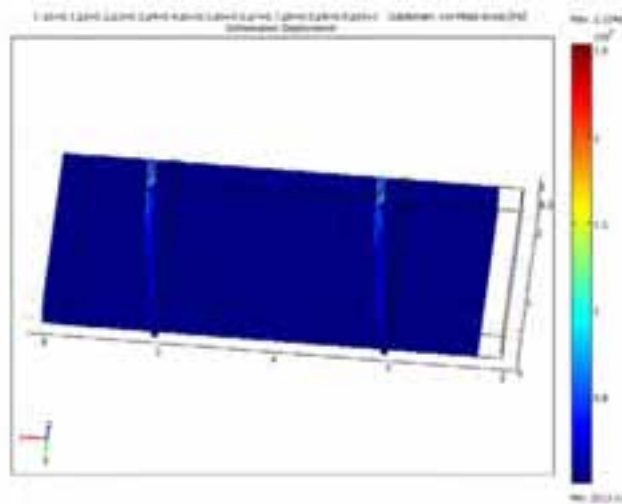


Figura 9: Norma de von Mises de la tensión sobre la configuración deformada

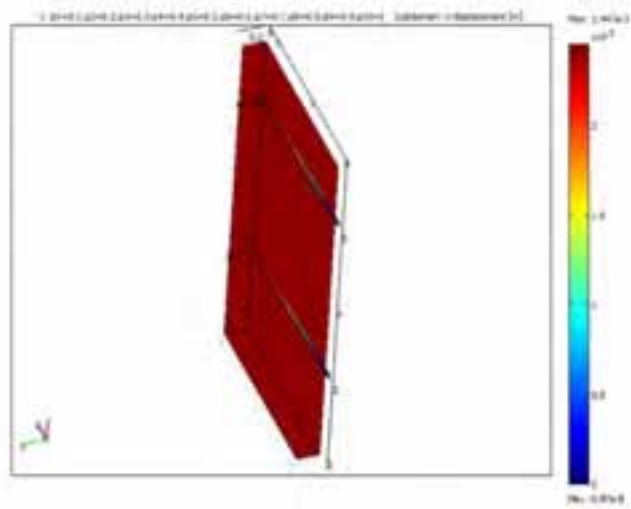


Figura 10: Componente x del desplazamiento

I.2 Aceleración longitudinal $0.8g$.

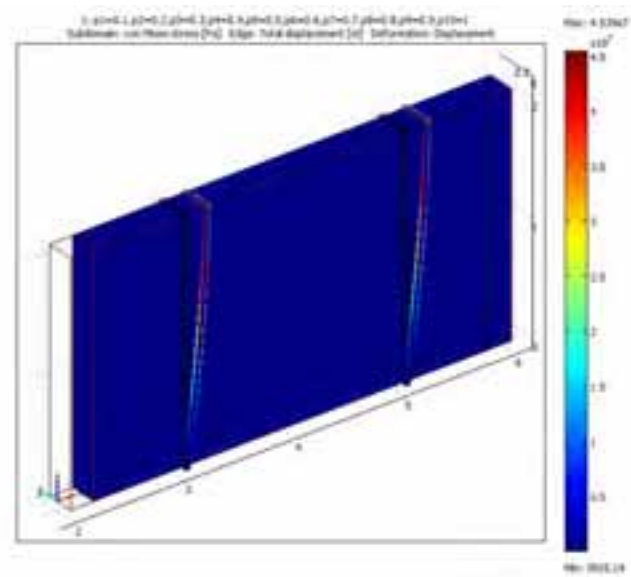


Figura 11: Norma de von Mises de la tensión sobre la configuración deformada

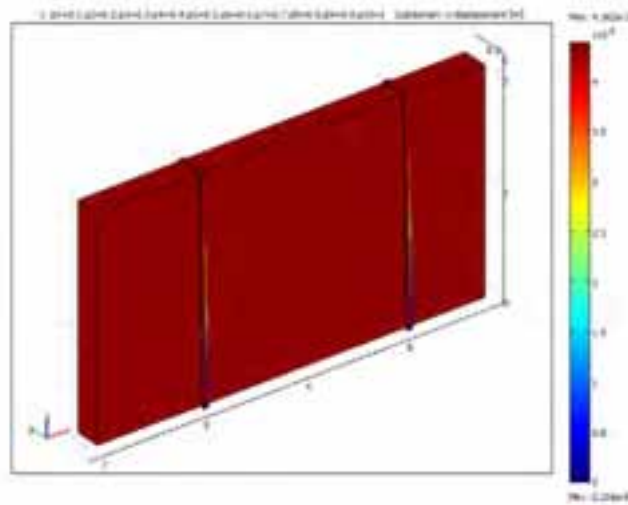


Figura 12: Componente x del desplazamiento

Caso II:

II.1 Aceleración transversal $0.8g$

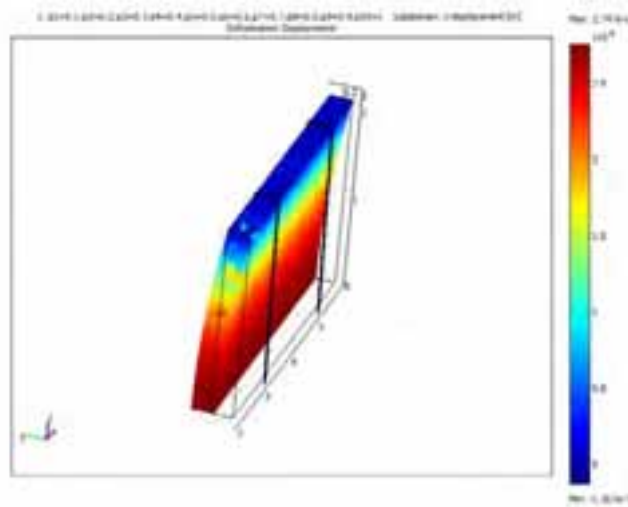


Figura 13: Componente y del desplazamiento sobre la configuración deformada



Figura 14: Tensión en la eslinga

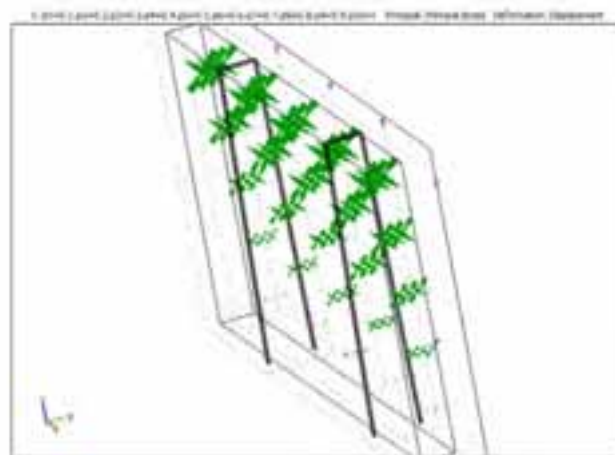


Figura 15: Tensiones Principales

II.2 Aceleración transversal $0.8g$ y aceleración vertical $1g$.

No se apreciaron diferencias significativas con respecto al ensayo II.1.

5. Conclusiones

El grupo de trabajo considera que la metodología de simulación numérica permitiría dar respuesta completa al problema planteado por la empresa. A

la vista de los resultados se hace la siguiente propuesta de trincaje, cuyos puntos esenciales son:

- El diseño de una malla en el techo del contenedor aprovechando las anillas superiores (ver figura 16). Cada *bundle* llevaría un sistema de trincaje con eslingas que impedirían su movimiento lateral.
- El diseño de cables de conexión en el suelo del contenedor utilizando las anillas inferiores (ver figura 16). De nuevo cada *bundle* se sujetaría con eslingas a la base del contenedor.

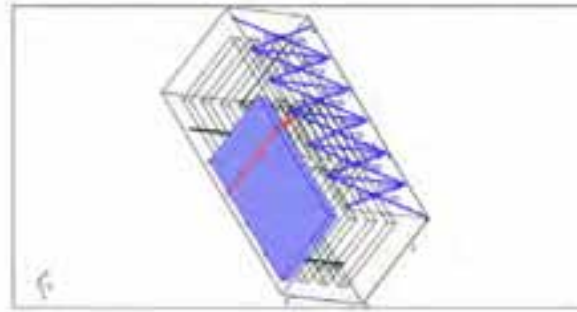


Figura 16: Propuesta de trincaje

La simulación numérica del sistema de trincaje se podría llevar a cabo en tres fases, que incluirían el análisis matemático y la simulación numérica de los siguientes puntos:

- Diseño del armazón de la eslinga de amarre superior.
- Diseño de las eslingas de sujeción de amarre inferior.
- Acoplamientos de cada diseño con las eslingas de amarre de cada *bundle*.

Referencias

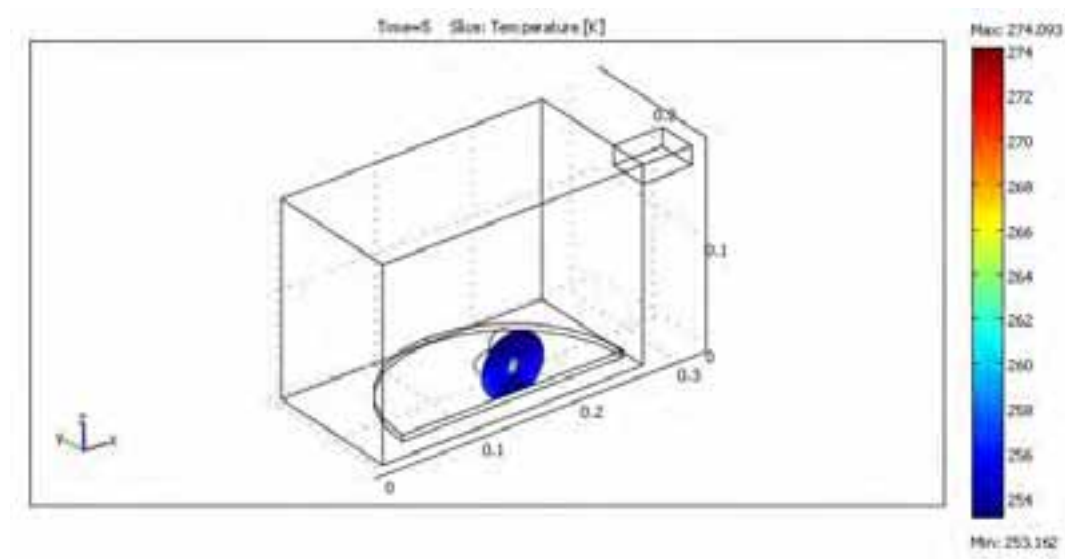
- [1] P.G. Ciarlet. *Élasticité Tridimensionnelle*. Masson (1985).
- [2] M.E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press (1990).
- [3] N. Kikuchi, J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Siam (1998).
- [4] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer (2006).

Microwave thawing

Coordinador Académico Alfredo Bermúdez de Castro
Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela
E-mail alfredo.bermudez@usc.es

Representante de la Empresa Julio César González
Empresa Teaxul
E-mail teaxul@teaxul.com

Grupo de trabajo José Luis Ferrín González (Universidade de Santiago de Compostela), Francesc Font Martínez (Centre de Recerca Matemàtica), M. Dolores Gómez Pedreira (Universidade de Santiago de Compostela), Tim Myers (Centre de Recerca Matemàtica), Francisco J. Pena Brage (Universidade de Santiago de Compostela), Andrés Prieto Aneiros (Universidade de Santiago de Compostela), Jerónimo Rodríguez García (Universidade de Santiago de Compostela)



Microwave thawing

Alfredo Bermúdez de Castro^{*} *Julio César González*^{**}

Resumen

In this document we describe the problem of microwave thawing presented by the galician company Teaxul. This technology could be applied to defrost fish prior its industrial processing. The numerical simulation of thawing was tackled by the working team in two ways: on the one hand, by studying the complete Maxwell equations coupled with the heat transfer equation and, on the other hand, by analyzing a simplified model consisting of plane waves to obtain an approximate solution.

Palabras clave: Thawing; Microwave; Maxwell's equations; Lossy dielectrics; Lambert's law

AMS Subject Classification: 78A55, 80A20

1. Problem description

Teaxul is a company that develops technical solutions for industrial problems. It has a research center that receives requests from a wide variety of industries among which are fishing companies. Usually, fish is frozen at sea and brought to the factory for its treatment. Before processing, fish is thawed at room temperature for one day. Teaxul proposes to use electromagnetic waves in the frequency range of microwaves and radio-frequency (RF). For thawing purposes this technique could speed up the overall process improving at the same time sanitary conditions, but it much less understood. The goal of this group is thus to provide a better knowledge of this mechanism through mathematical modeling and numerical simulation. To approaches have been considered: i) the first one uses the full model of microwave heating and, due to its complexity, needs to be numerically solved, ii) the second one uses a simplified model based on plane wave analysis seeking an analytical resolution of the equations.

^{*}E-mail: alfredo.bermudez@usc.es

^{**}E-mail: teaxul@teaxul.com

2. Introduction to microwave heating

Household microwave ovens work by passing non-ionizing microwave radiation, at a frequency of 2.45 GHz. Some substances in the food, like water and fat, absorb energy from the microwaves in a process called dielectric heating. Microwave heating is more efficient on liquid water than on frozen water, where the movement of molecules is more restricted. Raytheon Company sold the first microwave oven in 1947, derived from radar technology developed during the World War II. These units were still too large and expensive for general home use. The compact versions become popular from 1967.

Large industrial microwave ovens operate at the common frequency of 915 MHz. Microwave heating presents significant advantages over conventional methods in reducing process time and improving food quality[11]. Until recently, microwave heating in the industry was not as well established as in the domestic market. There were several reasons for that: lack of reliable information on the electrical parameters of food, and a more expensive cost of electric heating compared to other cheaper technologies, such as gas.

Finally, other articles analyze from different angles the microwave food heating[14, 11, 12].

3. Maxwell equations

The propagation of the electromagnetic field is modeled by the following system of partial differential equations (Maxwell's equations):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho_v, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{curl} \mathbf{H} &= -\mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}$$

and the constitutive equations,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E},\end{aligned}$$

where we have used standard notations, namely,

- \mathbf{E} is the electric field,
- \mathbf{H} is the magnetic field intensity,

- \mathbf{D} is the electric displacement,
- \mathbf{B} is the magnetic induction (or magnetic flux density),
- ε is the electric permittivity,
- μ is the magnetic permeability,
- σ is the electric conductivity.

4. Interface and boundary conditions

Across any surface in the free space, the normal component of \mathbf{B} and the tangential component of \mathbf{E} are continuous; more precisely,

$$\mathbf{B}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{n}^- = 0,$$

and

$$\mathbf{E}^+ \times \mathbf{n}^+ + \mathbf{E}^- \times \mathbf{n}^- = 0.$$

If we have a charge density $\rho_{\mathcal{S}}$, on surface \mathcal{S} , then

$$\mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{D}^- \cdot \mathbf{n}^- = -\rho_{\mathcal{S}}.$$

Similarly, if we have a surface current of density $\mathbf{J}_{\mathcal{S}}$ on \mathcal{S} , then the tangential component of \mathbf{H} jumps across \mathcal{S} . More precisely,

$$\mathbf{H}^+ \times \mathbf{n}^+ + \mathbf{H}^- \times \mathbf{n}^- = \mathbf{J}_{\mathcal{S}}.$$

An important case corresponds to a surface \mathcal{S} separating two different materials:

- i) Assume that one of the regions, let say, the “ $-$ ” region, is a perfect conductor ($\sigma \rightarrow \infty$). Since $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, in order to have a finite density current, \mathbf{E} must be null. From Faraday’s law we also deduce $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Hence, if there exist a surface charge density $\rho_{\mathcal{S}}$ and a surface current density $\mathbf{J}_{\mathcal{S}}$ we must have

$$\mathbf{D}^+ \cdot \mathbf{n}^+ = -\rho_{\mathcal{S}}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H}^+ \times \mathbf{n}^+ = \mathbf{J}_{\mathcal{S}}. \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

- ii) If both materials have finite conductivities then free surface currents can not exist on the interface, in which case,

$$\mathbf{H}^+ \times \mathbf{n}^+ + \mathbf{H}^- \times \mathbf{n}^- = \mathbf{0}.$$

4.1. Surface impedance boundary condition

If one of the materials, let say the “-”, is a good conductor but not a perfect conductor, then the electromagnetic field penetrates only a thin layer (see also 5.2.1 below). Instead of modelling this layer, an alternative in the harmonic regime consists in writing a boundary condition on the interface between the two media. This boundary condition has been introduced by *Leontovich* and is called surface impedance boundary condition. It reads

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}^+ = -Z\mathbf{n}^+ \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}^+),$$

where Z is the surface impedance.

5. Harmonic plane waves in an unbounded region

In this section we compute harmonic plane wave solutions of Maxwell’s equations in an unbounded conductive or lossy dielectric region.

5.1. Harmonic regime

In the harmonic regime we suppose that sources are of the form:

$$\begin{aligned}\rho_v(x, t) &= \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \hat{\rho}_v(x)), \\ \mathbf{J}(x, t) &= \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \hat{\mathbf{J}}(x)),\end{aligned}$$

where ω is the angular frequency, and seek solutions with the same time dependence. By replacing in Maxwell’s equations we get

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{div}(\varepsilon \hat{\mathbf{E}}) &= \hat{\rho}_v, \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{B}} &= 0, \\ \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} &= -i\omega\mu \hat{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{curl} \hat{\mathbf{H}} &= \hat{\mathbf{J}} + i\omega\varepsilon \hat{\mathbf{E}} = \\ &= \sigma \hat{\mathbf{E}} + i\omega\varepsilon \hat{\mathbf{E}} = \\ &= i\omega \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega} i \right) \hat{\mathbf{E}}.\end{aligned} \right\}$$

These equations are analogous to Maxwell’s equations for free space. In particular, Faraday’s and Ampère’s laws become the same by replacing,

$$\mu_0 \text{ with } \mu \text{ and } \varepsilon_0 \text{ with } \varepsilon - \frac{\sigma}{\omega} i,$$

respectively.

Some algebraic manipulations allow to eliminate either $\hat{\mathbf{E}}$ or $\hat{\mathbf{H}}$ to get

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \operatorname{curl} \hat{\mathbf{E}} - \omega^2 \mu \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega} i \right) \hat{\mathbf{E}} &= 0, \\ \operatorname{curl} \operatorname{curl} \hat{\mathbf{H}} - \omega^2 \mu \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega} i \right) \hat{\mathbf{H}} &= 0,\end{aligned}$$

equations that will be used to perform a plane wave analysis.

5.2. Plane waves

If the above electromagnetic parameters are constant, we can obtain plane wave solutions:

$$\widehat{\mathbf{E}}(x) = \left[\widehat{\mathbf{E}}_m^+ e^{-i\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}\right)}x_3} + \widehat{\mathbf{E}}_m^- e^{i\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}\right)}x_3} \right] \mathbf{e}_1. \quad (4)$$

Note that plane waves in the free space can be obtained by replacing $\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}\right)}$ by $\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.

5.2.1. Propagation constant. Attenuation constant. Phase constant. Skin depth.

The number,

$$\gamma = i\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}\right)},$$

is called the **propagation constant** and can be separated into its real and imaginary parts,

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (m^{-1}).$$

The real part α is called the **attenuation constant** while β is termed the **phase constant** of the plane wave. For real ε the following positive values of α and β are obtained:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} & (m^{-1}), \\ \beta &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} & (m^{-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

We notice that, for $\sigma = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ and $\mu = \mu_0$, α is zero and $\beta = \beta_0$.

The corresponding solution of the Maxwell's equations is

$$\mathbf{E}(x, t) = \left[\mathbf{E}_m^+ e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 + \phi^+) + \mathbf{E}_m^- e^{\alpha x_3} \cos(\omega t + \beta x_3 + \phi^-) \right] \mathbf{e}_1.$$

A comparison of the conductive region wave solution with the empty-space wave solution reveals the presence of two real factors $e^{-\alpha x_3}$ and $e^{\alpha x_3}$ accounting for the wave decay as the positive x_3 and the negative x_3 travelling waves proceed in their corresponding direction of propagation with increasing time.

Looking at the expression for α we see that the wave attenuation in conductive region is governed by the size of the non-dimensional term $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ relative to unity.

Moreover, we notice that the wave penetrates the conductive region in such a way that for $x_3 = 1/\alpha$ its amplitude has decayed to e^{-1} of its value at the reference surface $x_3 = 0$.

This motivates the definition of **penetration depth** or **skin depth** by,

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{m}^{-1}).$$

In the limit case of a perfect conductor ($\sigma \rightarrow \infty$), the limit of α is also ∞ and then the skin depth is 0. This means that the current is concentrated on the surface ($x_3 = 0$).

If $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$, then α can be approximated by

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega^2\mu\varepsilon\sigma}{2\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}.$$

In its turn, the skin depth can be approximated by

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (m).$$

5.3. Lossy dielectrics

We recall that when a dielectric material is subjected to an applied static electric field, the centroids of the positive and negative charges at atomic level are displaced relative to each other forming electric dipoles. When the material is examined macroscopically, the presence of all the dielectric dipoles is accounted for by introducing an electric polarization vector \mathbf{P} . In fact, the electrical permittivity ε is introduced to account for the presence of \mathbf{P} .

When the applied electric field changes with time (for instance it is time-harmonic), the polarization field \mathbf{P} is affected becoming a function of the frequency of the applied electric field. By this action of the alternating fields, damping (loss) effects similar to those produced by conduction currents appear. They are responsible, for instance, for the heating of materials using microwaves.

The classical model for these phenomena, inspired by experimental measurements on dielectric materials, assumes an oscillating system of interacting atomic or molecular particles in which the response of the material to the applied electric fields involves damping mechanisms plus resonances about certain frequencies. The damping mechanism is taken as proportional to the velocity of particles, so the model is similar to the forced damped harmonic oscillator. In other words, the response of the dielectric to the applied field

resembles that of a three-dimensional system of masses interconnected through springs and dashpots and subjected to applied distributed vibrational forces or, analogously, a network of reactive and resistive circuit elements excited by sinusoidal voltages with maximum losses occurring at resonant frequencies. For typical dielectric materials, the lowest resonance is usually in or above the microwave range.

In order to model the macroscopic effect of these interaction phenomena we make the permittivity of the dielectric become complex:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - \varepsilon''i.$$

We notice that a complex permittivity has already been defined by $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}i$, in connection with the loss mechanism in a conductive region. Comparing both expressions we observe that the above described damping mechanism is equivalent to a conduction loss where $\omega\varepsilon''$ assumes the role of conductivity σ in a lossy dielectric. Moreover ε' is identical with the real electric permittivity ε . Summarizing,

$$\varepsilon = \varepsilon', \quad \sigma = \omega\varepsilon''.$$

Accordingly, the loss tangent in a lossy dielectric is given by,

$$|\tan \delta_d| = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'},$$

and the attenuation constant by,

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}.$$

Similarly the phase constant β and the wave impedance $\hat{\eta}$ are,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1 \right]^{1/4}, \\ \hat{\eta} &= \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon'}}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} \right]^{1/2}} e^{i(1/2) \arctan(\varepsilon''/\varepsilon')}. \end{aligned}$$

For a **lossy dielectric** $\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1$, and the above expressions can be approximated by

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) \\ \beta &= \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \\ \hat{\eta} &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} i \right].\end{aligned}$$

We notice that, in the limiting case of a **lossless dielectric** ($\varepsilon'' = 0$), they reduce to

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon'}, \quad \hat{\eta} = \sqrt{\mu/\varepsilon'},$$

as expected.

5.3.1. Lambert's Law

From (4) we can deduce that the electromagnetic field is approximated by the plane wave solution:

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_m^+ e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 + \phi^+) \mathbf{e}_1.$$

In fact, the standard Lambert's Law is still simpler than the previous one, namely,

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_m^+ e^{-\alpha x_3},$$

with

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}.$$

Then

$$\alpha^{-1} = \frac{\lambda}{\pi(2\varepsilon')^{1/2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2} - 1 \right]^{-1/2}.$$

In some studies on microwave heating, the electromagnetic field is approximated by the Lambert's Law, instead of solving the full Maxwell's equations.

6. Mathematical model

In this section we summarize the electromagnetic model and introduce the thermal one.

6.1. Electromagnetic model

We suppose that sources are harmonic so we are led to solve the harmonic Maxwell equations. In terms of the electric field they read,

$$-\omega^2\mu\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{\omega}i\right)\widehat{\mathbf{E}} + \mathbf{curl}\mathbf{curl}\widehat{\mathbf{E}} = 0.$$

By replacing ε by $\varepsilon' - i\varepsilon''$ we get

$$-\omega^2\mu\varepsilon'\widehat{\mathbf{E}} + i\omega\mu(\sigma + \omega\varepsilon'')\widehat{\mathbf{E}} + \mathbf{curl}\mathbf{curl}\widehat{\mathbf{E}} = 0.$$

6.1.1. Boundary conditions

There are several kinds of boundary conditions:

- Let us suppose that the internal surface of the oven is made with a perfect conductor. Then the boundary condition there is (“perfect conductor”),

$$\widehat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

where \mathbf{n}^+ is the outward unit normal vector.

A better condition is the below impedance one, namely,

$$\mathbf{n} \times (\widehat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}) + i\frac{Z}{\omega\mu}(\mathbf{curl}\widehat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}) = \mathbf{0},$$

and the complex number Z is the *surface impedance*. In the Leontovich theory it is given by

$$Z = (1 + i)\frac{1}{\sigma\delta},$$

and δ given by

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}.$$

- On symmetry boundaries we have,

$$\widehat{\mathbf{H}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

- The source wave is imposed on a section of the waveguide connecting the magnetron to the cavity. By properly designing this waveguide (actually by choosing its section), depending on the excitation frequency, it is possible to get a waveguide where only the transversal electric mode TE_{10} propagates.

Neglecting reflections we can prescribe the tangential component of this mode, $\widehat{\mathbf{E}}_{10} \times \mathbf{n}$, as a Dirichlet boundary condition.

Alternatively, it is possible to give a condition of the “lumped port” kind.

6.1.2. Heating power

The power density released by the electromagnetic field in the food is given by

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}(\sigma + \varepsilon''\omega)|\widehat{\mathbf{E}}|^2.$$

This power is the source term in the heat transfer equation.

6.2. The thermal model

The standard heat transfer equation is

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = \mathcal{P} \quad (6)$$

where ρ is density, c is specific heat, k is thermal conductivity and \mathcal{P} is the heat source, in our case due to the electromagnetic field.

However, in the present case a change of phase takes place so equation (6) must be corrected to take into account the latent heat involved in this process, by introducing an enthalpy function. More precisely, the heat transfer equation is rewritten in the form

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = \mathcal{P}. \quad (7)$$

where e denotes the enthalpy density which is expressed as a function of temperature by

$$e \in \mathcal{H}(\theta),$$

where

$$\mathcal{H}(\theta) = \begin{cases} \int_0^\theta \rho(s) c(s) ds, & \theta < \theta_m \\ \left[\int_0^{\theta_m} \rho(s) c(s) ds, \int_0^{\theta_m} \rho(s) c(s) ds + \rho(\theta_b) L \right], & \theta = \theta_m \\ \int_0^\theta \rho(s) c(s) ds + \rho(\theta_m) L, & \theta > \theta_m, \end{cases} \quad (8)$$

where θ_m is the melting temperature and L is the latent heat per unit mass.

6.2.1. Boundary conditions

as a first approximation, the heat transfer equation is only solved in the food specimen. As boundary condition on the surface of the specimen we can use a convective Newton's law, i.e.,

$$k \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = h(\theta_{air} - \theta).$$

6.3. Couplings and nonlinearities

There exist several coupling mechanisms between the two models:

- The electric permittivity depends on temperature.
- The heat nonlinearly depends on the electric field.
- Density, specific heat and thermal conductivity depends on temperature.
- Enthalpy function is multi-valued.

7. One-dimensional defrosting

Phase change, such as freezing or melting, is a well researched area with a vast literature covering both experiment and theory, see Davis [?] for example. In this section we will analyse a standard model for melting. In order to identify the dominant mechanisms driving the melting we will deal with the simple one-dimensional model. Note, although the two or three dimensional models will obviously exhibit different solutions it is unlikely that they will be qualitatively different. Hence the one-dimensional model should provide valuable information concerning the melting process.

The melting process occurs in two distinct stages: when the fish first enters the magnetron it is frozen and the electromagnetic waves heat it up until melting commences: subsequently there is a growing defrosted layer and a shrinking frozen layer. The appropriate mathematical model is as follows.

Stage 1: the fish is completely frozen

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_{ff} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{ff}}{k_{ff}} p' \quad (9)$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{at} \quad t = 0 \quad (10)$$

$$k_{ff} \frac{\partial \theta}{\partial x} = H_{fa} (\theta - T_a) \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = L \quad (12)$$

where θ is the temperature in the frozen fish, α_{ff} the thermal diffusivity of the frozen fish, k_{ff} the conductivity, p' represents the microwave power, θ_0 the initial temperature, H_{fa} the heat transfer coefficient between frozen fish and air and T_a the air temperature.

To simplify the mathematical formulae we have chosen $x = 0$ to be at the top of the fish and so this is where the power p' is strongest. We apply

a Newton cooling condition there, indicating that heat is lost to or gained from the surrounding air, which is assumed to be at a constant temperature T_a . The bottom of the fish, at $x = L$, is assumed to be insulated. It would be a simple matter to introduce different boundary conditions but given the current lack of physical data these seem a reasonable starting point.

Stage 2: the fish now has defrosted and frozen sections

Once melting begins we require heat equations in the frozen and defrosted parts. The boundary between the two is determined through an energy balance known as the Stefan condition

$$T_t = \alpha_{df} T_{xx} + \frac{\alpha_{df}}{k_{df}} p \quad (13)$$

$$\theta_t = \alpha_{ff} \theta_{xx} + \frac{\alpha_{ff}}{k_{ff}} p' \quad (14)$$

$$\rho_w L_m \frac{ds}{dt} = k_{ff} \theta_x - k_{df} T_x \quad \text{at} \quad x = s \quad (15)$$

where T is the temperature in the solid and s the position of the melt front. The subscript df denotes defrosted fish, L_m is the latent heat of melting and ρ_w the density of water. Note, the microwave power in the defrosted part differs from that of the frozen part: $p > p'$ since microwaves heat more more efficiently than ice. These equations are subject to

$$k_{df} T_x = H_{da}(T - T_a) \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (16)$$

$$\theta_x = 0 \quad \text{at} \quad x = L \quad (17)$$

$$\theta = T = T_m \quad \text{at} \quad x = s. \quad (18)$$

Equation (16) indicates that the air now heats up the defrosted fish. At the phase change boundary both the frozen and defrosted sections are at the melting temperature T_m . In our subsequent calculations we will set this to the melt temperature of water, $T_m = 273\text{K}$, however the true value may differ from this due to the presence of salt or other impurities in the water.

To understand the behaviour of any mathematical model it is often useful to nondimensionalize the system. In this case we scale variables in the following manner

$$\hat{x} = x/L \quad \hat{t} = t/\tau \quad \hat{\theta} = (\theta - T_m)/\Delta\theta \quad \hat{T} = (T - T_m)/\Delta T \quad (19)$$

where L is the thickness of the fish, τ the melting time-scale and $\Delta\theta, \Delta T$ the temperature scales (only L is currently known).

We use the Beer-Lambert law to describe the microwave power within the fish. The Beer-Lambert law simply states that, due to absorption by the media, the power of the electromagnetic radiation decreases exponentially. Hence we write

$$p = p_0 e^{-2x/R_i} \quad (20)$$

where p_0 is the power at the surface $x = 0$ and R_i is a decay length. Comparison with the formula of §5.3.1 which approximates the waves outside the fish shows $p_0 \sim E_m^+$, $R_i \sim -\alpha/2$. However, we must be careful in the application: p_0 provides the heat source inside the fish. Since microwaves can more easily cause water molecules to vibrate than ice $p_0 > p'_0$ and so we cannot use the value E_m^+ which occurs just outside the fish and does not take the fish temperature into account. The expression for α and hence R_i depends on the permittivity of the material ϵ', ϵ'' which take different values for frozen or liquid water. This scaling changes the governing equations in Stage 2 to

$$\frac{\Delta T}{\tau} T_t = \frac{\Delta T \alpha_{df}}{L^2} T_{xx} + \frac{\alpha_{df} p_0}{k_{df}} e^{-2Lx/R_i} \quad (21)$$

$$\frac{\Delta \theta}{\tau} \theta_t = \frac{\Delta \theta \alpha_{ff}}{L^2} \theta_{xx} + \frac{\alpha_{ff} p'_0}{k_{ff}} e^{-2Lx/R'_i} \quad (22)$$

$$\frac{\rho_w L_m L}{\tau} \frac{ds}{dt} = \frac{k_{ff} \Delta \theta}{L} \theta_x - \frac{k_{df} \Delta T}{L} T_x \quad (23)$$

The time-scale in such problems is standard and comes from the diffusion term $\tau = L^2/\alpha_{df}$, that is, the process time depends on how quickly heat can move through the material, which in turn depends on the distance it must travel and the thermal diffusivity. The temperature rise is due to the microwave heating hence we choose $\Delta T = p_0 L^2/k_{df}$, $\Delta \theta = p'_0 L^2 \alpha_{ff}/(k_{ff} \alpha_{df})$. We may verify that these scales give sensible values by noting that a 5cm thick sample has $\tau \approx 25 \times 10^{-4}/1,5 \times 10^{-7} \approx 3$ hours, that is, we expect the process to take of the order 3 hours. While with $p_0 = 1000\text{W}/\text{m}^3$ the temperature variation in the defrosted portion is around 5K. Typical parameter values are provided in the results section.

Dropping the hat notation, the non-dimensional equations are

$$T_t = T_{xx} + e^{-\gamma x} \quad (24)$$

$$\theta_t = A \theta_{xx} + e^{-\gamma' x} \quad (25)$$

$$\beta \frac{ds}{dt} = k \theta_x - T_x \quad \text{at} \quad x = s \quad (26)$$

where $\gamma = -2L/R_i$, $A = \alpha_{ff}/\alpha_{df}$ and $k = k_{ff} \Delta \theta/(k_{df} \Delta T)$. The Stefan number $\beta = \rho_w L_m/(\rho_{df} c_{df} \Delta T)$. Taking typical values for tuna we find $\beta \approx 20$. This would typically be considered a large Stefan number. Physically a large Stefan number indicates that the phase change is slow (compared to the rate of heat diffusion) and there are standard techniques for dealing with this situation.

The non-dimensional boundary conditions are

$$T_x = h(T - T_b) \quad \text{at} \quad x = 0 \quad (27)$$

$$T = \theta = 0 \quad \text{at} \quad x = s \quad (28)$$

$$\theta_x = 0 \quad \text{at} \quad x = 1 \quad (29)$$

where $h = H_{da} L/k_{df}$ and $T_b = (T_a - T_m)/\Delta T$.

7.1. Large Stefan number solution

The large Stefan number problem corresponds to a situation with slow melting, it is then convenient to re-scale time so $t = \beta \bar{t}$: \bar{t} is termed a slow time-scale. Writing $\epsilon = 1/\beta \ll 1$ and immediately dropping the overbars on the new time variable, we find

$$\epsilon T_t = T_{xx} + e^{-\gamma x} \quad (30)$$

$$\epsilon \theta_t = A \theta_{xx} + e^{-\gamma' x} \quad (31)$$

$$\frac{ds}{dt} = k \theta_x - T_x \quad \text{at} \quad x = s. \quad (32)$$

The presence of a small parameter suggests the use of an asymptotic expansion of the form

$$T = T_0 + \epsilon T_1 + \dots \quad \theta = \theta_0 + \epsilon \theta_1 + \dots \quad (33)$$

For the present study we will only investigate the leading order problem involving T_0, θ_0 . This involves neglecting terms of order $\epsilon \approx 0,05$. Since the variables are scaled to be of order unity this means we should expect this method to lead to errors of around 5%. Substituting the series into the governing equations and taking only the leading order terms gives the temperature profiles

$$T_0 = \frac{1}{\gamma^2} (e^{-\gamma s} - e^{-\gamma x}) + B(x - s) \quad (34)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{A\gamma'^2} (e^{-\gamma' s} - e^{-\gamma' x}) - \frac{e^{-\gamma'}}{A\gamma'} (x - s) \quad (35)$$

where

$$B = \frac{1}{1 + hs} \left\{ h \left[\frac{1}{\gamma^2} (e^{-\gamma s} - 1) - T_b \right] - \frac{1}{\gamma} \right\}. \quad (36)$$

Substituting the leading order temperature gradients into the ODE for the melting front gives a first order equation to determine $s(t)$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k}{A\gamma'} (e^{-\gamma' s} - e^{-\gamma'}) - \frac{e^{-\gamma s}}{\gamma} - B, \quad (37)$$

where $s(0) = 0$.

7.2. Results

In Figure 1 we show how the melting proceeds with time for a 5cm thick piece of fish. The parameter values used were

$$\begin{aligned} c_{df} &= 3,18 \times 10^3 \text{J}/(\text{kgK}) & c_{ff} &= 1,63 \times 10^3 \text{J}/(\text{kgK}) & k_{df} &= 0,55 \text{W}/(\text{mK}) \\ k_{ff} &= 2,2 \text{W}/(\text{mK}) & \rho_{df} &= 0,98 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3 & \rho_{ff} &= 1,07 \times 10^3 \text{kg}/\text{m}^3 \\ \alpha_{df} &= 1,77 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s} & \alpha_{ff} &= 1,26 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s} & L_m &= 2,5 \times 10^5 \text{J}/\text{kg} \\ p_0 &= 1000 \text{W}/\text{m}^2 & p'_0 &= 100 \text{W}/\text{m}^2 \\ R_i &= R'_i = 0,02 \log(10) \text{m} & H_{da} &= 5 \text{W}/(\text{m}^2 \text{K}). \end{aligned}$$

The choice of R_i ensures that 2cm into the fish the power of the microwave has decreased by a factor 10. The parameter values are discussed in detail in §8. In this case total melting occurs within 6130s (slightly less than 2 hours), which is well in keeping with the estimated time-scale of 3 hours. The melt front velocity is approximately constant but in fact slowly decreases in time as the melt front moves away from the heat source.

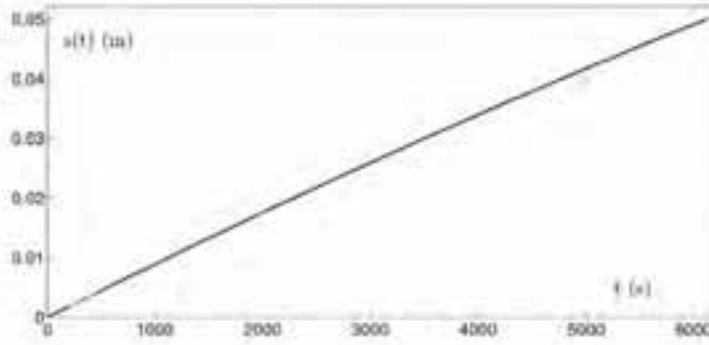


Figure 1: Variation of the melt front position with time

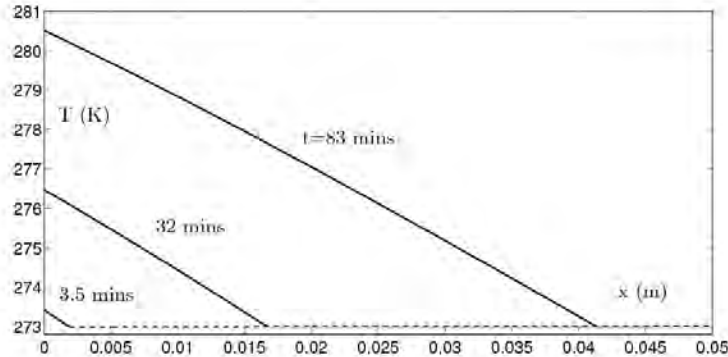


Figure 2: Temperature profiles for $t = 3.5, 32, 83$ mins and $T_a = 298\text{K}$

In Figure 2 we present the temperature profiles at times $t = 3.5, 32, 83$ minutes. As may be seen, the temperature profiles in the defrosted section are approximately linear. In the frozen section they are always close to the melt temperature, this is a consequence of the insulated boundary condition and the pseudo-steady state approximation. In this case we note that the temperature near the top of the defrosted part is almost 8K above freezing and this will increase before the defrosting process is complete. This scale of temperature rise is unacceptably high. Consequently, in Figure 3 we examine the effect of decreasing the ambient temperature from 298 to 285K. In this

case the time to complete melting is significantly longer at around 190 mins (slightly greater than 3 hours) however the temperature rise in the fish is much lower, around 4K. This result indicates the existence of some optimal strategy by balancing temperature rise against time.

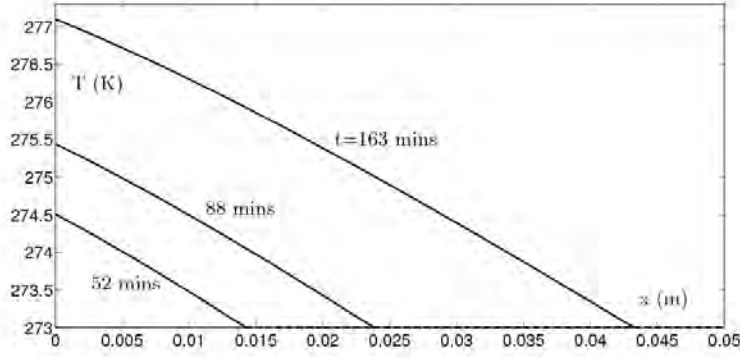


Figure 3: Temperature profiles for $t = 52, 88, 163$ mins and $T_a = 285\text{K}$

7.3. Discussion

The analysis presented in this section dealt with an idealised one-dimensional model for a piece of defrosting fish. Whilst it is idealised the solutions are useful to indicate the important mechanisms controlling the process and so provide important information for experimental studies. However, a more in-depth study is recommended, not only to ascertain parameter values more accurately but also the boundary conditions. The insulation condition $\theta_x = 0$ at $x = 1$ clearly makes the solution in the ice unrealistic and this should be replaced with a cooling condition (but then data is needed on the heat transfer coefficient between the fish and substrate).

The non-dimensionalisation provides valuable clues on the melting process. The temperature scales

$$\Delta T = \frac{p_0 L^2}{k_{df}} \quad \Delta \theta = \frac{p'_0 L^2 \alpha_{ff}}{k_{ff} \alpha_{df}} \quad (38)$$

tell us about the temperature increase in the different sections. The most important is in the defrosted section where it is crucial to avoid a temperature rise that will cook the fish or even put it above the usual storage temperature (around 4°C). The key parameters here are the microwave power, the thickness L and the conductivity of the fish. The temperature will rise proportional to the power and L^2 , and so to avoid cooking the power should be kept low and thin sections should be used. However, if we think of defrosting an actual fish there are sections where L is small, such as near

the tail and then much larger in the middle. Consequently we would expect to completely defrost the tail a long time before the middle section is defrosted. Once defrosting has taken place all the power would then go to cooking the fish. The time-scale $\tau = L^2/\alpha_{df}$ is also proportional to L^2 and so thin sections drastically reduce the defrosting time. It is interesting to note the time-scale does not depend on the power p_0 – this indicates that although increasing the power may increase the temperature near the top of the fish it is the size and diffusivity of the fish that determine how rapidly the heat from this power spreads.

The governing equations and boundary conditions contain a number of parameters which then allow us to determine the importance of the physical conditions and of course the real question is what parameters can be varied to improve the defrosting process and avoid overheating thinner sections of fish. The parameters are

$$\gamma = -2/(LR_i) \quad \gamma' = -2/(LR'_i) \quad A = \alpha_{ff}/\alpha_{df} \quad (39)$$

$$k = k_{ff}\Delta\theta/(k_{df}\Delta T) = A\frac{p'_0}{p_0} \quad \beta = \rho_w L_m/(\rho_{df}c_{df}\Delta T) \quad (40)$$

$$h = H_{da}L/k_{df} \quad T_b = (T_a - T_m)/\Delta T. \quad (41)$$

In the above list, these include $L, p_0, p'_0, \Delta T$ and T_a : other parameters depend on the fish and are therefore fixed. As discussed already L is a key parameter, the microwave power is also important in controlling the temperature rise. It may be that a strategy involving varying p_0 along the conveyor belt could improve defrosting. The heat transfer coefficient H_{da} could be varied, for example by directing fans at the conveyor. T_a could also be used to control the process to some extent (as demonstrated in Figures 2, 3): reducing the ambient temperature can remove some of the microwave heat near the surface (which is the hottest area) but then the defrosting is slower. Again this could be varied along the conveyor belt. However, the relative importance of these terms can only be properly assessed with a more complete study.

One final point to note is that in the analysis of this section we did not solve the thermal problem in Stage 1. In fact this would provide an initial condition for Stage 2 and tell us when melting first occurs. However, since we use a large Stefan number expansion in Stage 2, the time derivatives drop out of the problem and we solve for a 'pseudo-steady state' (it is not truly steady-state since time enters through the boundary position). This means that we do not require an initial condition and so can neglect Stage 1.

8. Physical properties

The physical properties related to the thermal problem has been obtained from several sources. Thermal conductivity of skipjack tuna for several body

parts, for temperatures above freezing, are shown in Figure 4, extracted from reference[13].

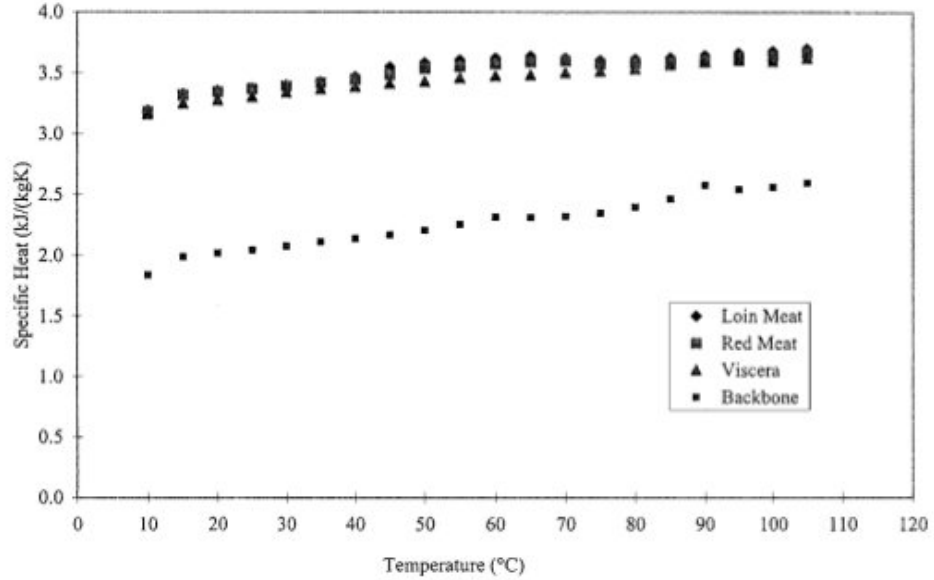


Figure 4: Thermal conductivity of tuna at several body parts.

In Figure 5 of the Ph.D. Thesis[9], a plot of the thermal conductivity depending on temperature above freezing can be observed.

Density of tuna is very similar to water density, so this value is used in our simulations.

Specific heat is studied in a wide range of sources. In the web page[3] constant values 3180 and 1630 J/(kg K) are prescribed above and below freezing, respectively.

In the FAO documental repository[4] constant values 0.4 and 0.9 kcal/(kg K) above and below freezing, respectively. Besides, the constant value of 60 kcal/kg is indicated for the fusion latent heat. In[13], similar values for specific heat can be found.

Regarding to electric properties, in[7] Figure 6 we can find the dielectric constant, ϵ' , and the loss factor, ϵ'' , of tuna at 2.45 GHz.

9. Numerical simulation

A numerical example has been performed with Comsol. We detailed here the characteristics of the simulation.

The geometry is a simplified version of a microwave oven with a sphere made of tuna material (see Figure 7):

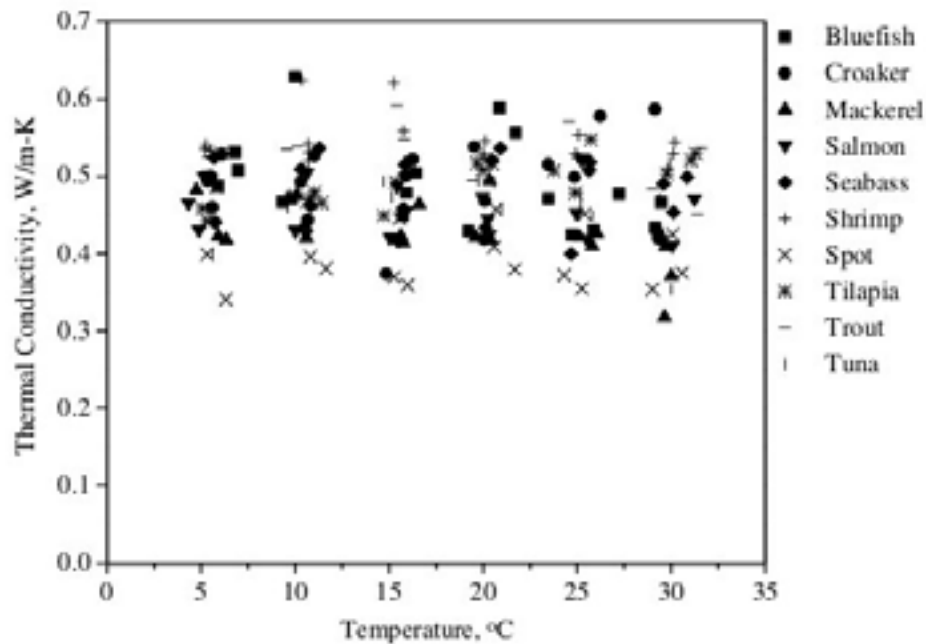


Figure 5: Thermal conductivity of several species.

- Oven dimensions: $267 \times 270 \times 188 \text{ mm}^3$
- Tuna radius: 31,5 mm
- Initial temperature: 20^0C

The norm of electric field after 5 seconds is shown in Figure 8. The initial temperature of the tuna is assumed to be 20^0C . Concerning the other physical parameters, they have been specified in Section 8. In particular, the electric conductivity of the tuna as well as the dielectric constant, the loss factor and the thermal conductivity as a functions of temperature have been deduced from tables and figures in Section 8. Temperature at the same time is depicted in Figure 9 and a closer look of the tuna sphere is shown in Figure 10. At a first glance, an homogeneous temperature distribution is difficult to achieve due to the presence of hotspots. Further numerical experiments introducing different values for power and frequency, even including the movement of food, must be carried on.

10. Conclusions

The study of fish thawing using electromagnetic waves has been tackled.

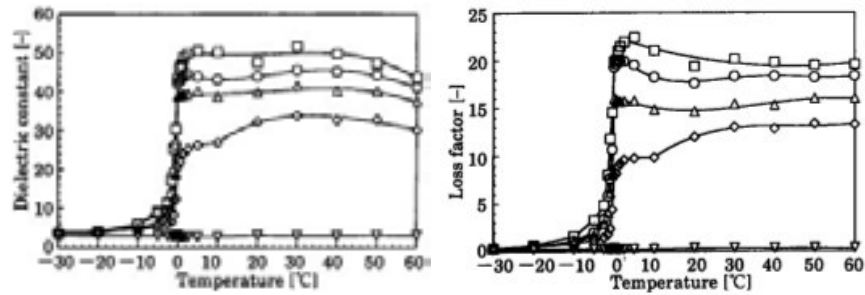


Figure 6: Dielectric constant and loss factor of tuna.

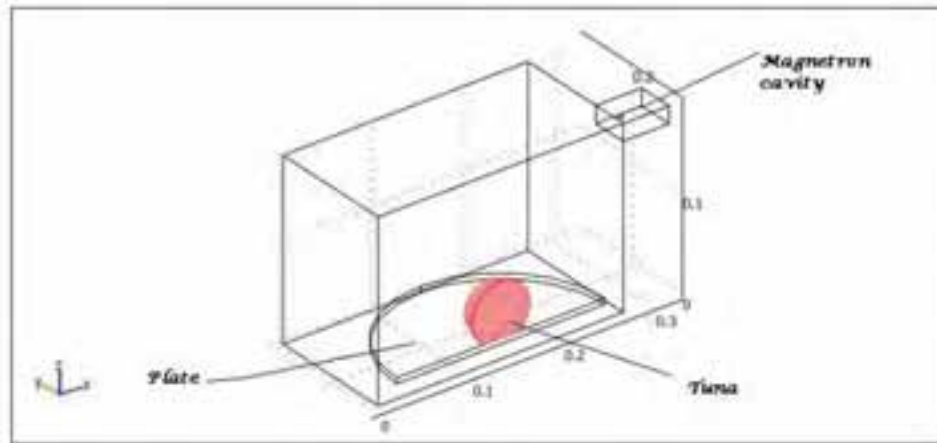


Figure 7: Domain.

The complete Maxwell's equations coupled with heat transfer equation for microwave heating have been studied. The nature of coupling has been discussed for dielectric materials like food.

A simplified model for plane waves using Lambert's Law has been presented.

A preliminary numerical simulation to test its feasibility has been performed.

An approximate model was developed to describe one-dimensional defrosting. This indicates the important mechanisms driving the melting and can also be used to determine an optimal strategy. In the two cases studied it was shown that the first led to more rapid defrosting but the temperature rise was unacceptable. The second case had slower defrosting but a more acceptable temperature rise. Clearly then there is a trade-off between speed and temperature rise, indicating the need for a more detailed study to ascertain how this may be best achieved.

More numerical simulation is also recommended.

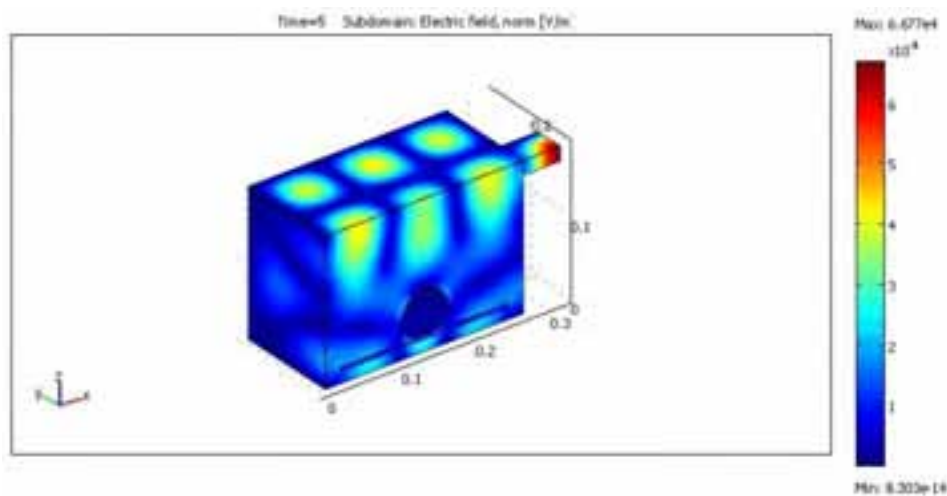


Figura 8: Norm of the electric field.

11. Acknowledgments

The authors express their gratitude to the Plataforma Tecnológica Galega Agroalimentaria (Ptgal) for contacting Teaxul and inviting them to present this interesting problem.

Referencias

- [1] L. Boillereaux, M. Alamir, S. Curet, O. Rouaud, and P. Bellemain. Estimation of temperature field during microwave tempering with unknown dielectric properties using clpp: A generic user-friendly software sensor. *Innovative Food Science and Emerging Technologies*, 2011.
- [2] L. A. Campañone and N. E. Zaritzky. Mathematical modeling and simulation of microwave thawing of large solid foods under different operating conditions. *Food Bioprocess Technol*, 3:813–825, 2010.
- [3] Document including specific heat of food and foodstuffs. http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-food-d_295.html
- [4] Fao corporate document repository, 1994. <http://www.fao.org/DOCREP/003/V3630E/v3630e05.htm>
- [5] A. K. Hagi. A mathematical model of the drying process. *Acta Polytechnica*, 41(3), 2001.

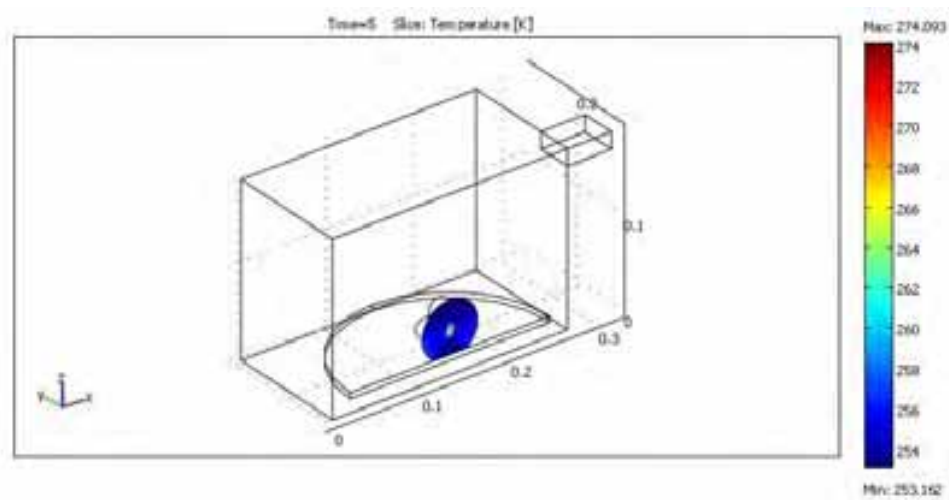


Figura 9: Temperature.

- [6] C. M. Liu, Q. Z. Wang, and N. Sakai. Power and temperature distribution during microwave thawing, simulated by using Maxwell's equations and Lambert's law. *International Journal of Food Science and Technology*, 40:9–21, 2005.
- [7] Changmin Liu and Noboru Sakai. Dielectric properties of tuna at 2450 Mhz and 915 Mhz as a function of temperature. *Nippon Shokuhin Kagaku Kogaku Kaishi*, 46(10):652–656, 1999.
- [8] J.A. Pelesko and G. A. Kriegsmann. Microwave heating of ceramic components. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 64:39–50, 2000.
- [9] S. Radhakrishnan. Measurement of thermal properties of seafood. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.
- [10] P. Salagnac, P. Glouannec, and D. Lecharpentier. Numerical modeling of heat and mass transfer in porous medium during combined hot air, infrared and microwaves drying. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:4479–4489, 2004.
- [11] J. Tang, F. Hao, and M. Lau. Microwave heating in food processing. *Advances in bioprocessing engineering*, 1:1, 2002.
- [12] V. Vegha and I. W. Turner. A hybrid technique for computing the power distribution generated in a lossy medium during microwave heating. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 197:122–140, 2006.
- [13] J. Zhang, B.E. Farkas, and S.A. Hale. Thermal properties of skipjack tuna (*katsuwonus pelamis*). *International Journal of Food Properties*, 4(1):81–90, 2001.

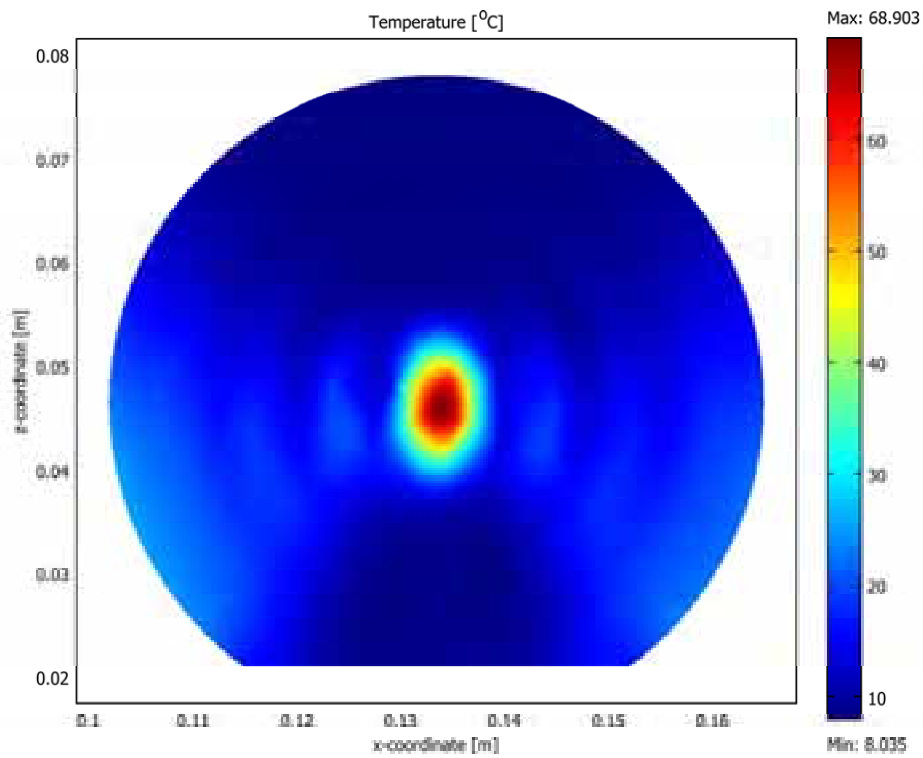


Figura 10: Temperature.

- [14] Xiang Zhao, Liping Yan, and Kama Huang. *Advances in Induction and Microwave Heating of Mineral and Organic Materials*, chapter Review of Numerical Simulation of Microwave Heating Process. InTech, 2011.

Agradecimientos

Los Comités Científico y Organizador desean agradecer todas las inestimables contribuciones de los ponentes de las empresas, de los coordinadores académicos de las propuestas, así como de los participantes en los distintos grupos de trabajo, que han contribuido al éxito científico de este evento.

También desea expresar su gratitud a las diversas instituciones que han colaborado económicamente en su financiación: el Ministerio de Educación y Ciencia a través del Proyecto Ingenio Mathematica i-MATH del programa Consolider-Ingenio 2010; la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia a través de la Red Mathematica Consulting y Computing de Galicia y la Facultad de Matemáticas de la USC que cedió los locales para el desarrollo de las jornadas.

Por último, desea expresar su agradecimiento a la Gestora de Valorización Tecnológica del Proyecto i-MATH y a los técnicos de Computing y Consulting del Nodo CESGA que con su minucioso trabajo y dedicación han permitido el éxito organizativo de las Jornadas y que han contribuido directamente en la edición de este libro.



S U M A R I O

Recuperación selectiva de información	7
Diseño de un sistema de trincaje en el transporte de láminas de granito	21
Microwave thawing	35

