

# MURCIA STUDY GROUPS WITH INDUSTRY

## i-Math 2008-2011



**Editores: Pascual Fernández Hernández, Jorge L. Navarro Camacho,  
Alfredo Marín Pérez, Blas Pelegrín Pelegrín,  
José Fernández Hernández, Manuel Pulido Cayuela,  
Francisco José Pena Brage y Adela Martínez Calvo**

**22, 23 y 24 de Junio 2012**

**Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia**



## MURCIA STUDY GROUPS WITH INDUSTRY

Murcia, 22-24 de Junio de 2011



*Editores*

---

Pascual Fernández Hernández

Jorge L. Navarro Camacho

Alfredo Marín PÃfrez

Blas Pelegrín Pelegrín

José Fernández Hernández

Manuel Pulido Cayuela

Universidad de Murcia

pfdez@um.es; jorgenav@um.es; amarin@um.es; josefdez@um.es; mpulido@um.es

Francisco José Pena Brage

Universidade de Santiago de Compostela

fran.pena@usc.es

Adela Martínez Calvo

Técnico de Consulting y Computing del Nodo CESGA

amartinez@cesga.es

**Imprime:** NINO, Centro de Impresión Digital  
Rosalía de Castro. 58  
Santiago de Compostela

**Dep. legal:** C 838-2012

## Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>5</b>  |
| <b>Estimación de la tasa de alimentación de los peces</b>   | <b>9</b>  |
| <i>Mariló López Belluga, Culmarex</i>   |           |
| <i>Jorge L. Navarro Camacho, Universidad de Murcia</i>  |           |
| <b>Optimización, configuración, automatización y organización de los recursos de transporte sanitario en área III</b> | <b>19</b> |
| <i>Fernando J. Pérez Martínez, Ambulancias de Lorca (Ambulorca)</i>   |           |
| <i>Pascual Fernández Hernández, Universidad de Murcia</i>   |           |
| <b>Problemas matemáticos en el sector de los materiales de construcción</b>   | <b>31</b> |
| <i>Catalina Sánchez Robles, Areniscas Rosal S.A.</i>  |           |
| <i>Francisco José Pena Brage, Universidade de Santiago de Compostela</i>  |           |
| <b>Agradecimientos</b>  | <b>39</b> |



## Introducción

---

Los días 22, 23 y 24 de Junio de 2011, la Red Española Matemática-Industria y el proyecto i-MATH organizó en Murcia la primera edición de los **Murcia Study Groups with Industry**.

El objetivo de los Murcia Study Groups with Industry es generar un espacio anual de encuentro de la Red Española Matemática-Industria y el proyecto i-MATH y empresas e instituciones con sede en la Comunidad Autónoma de Murcia, para:

- la promoción de la Matemática en el entorno empresarial, buscando activamente proyectos de investigación y desarrollo en donde la Matemática tenga una especial relevancia;
- la orientación de la Investigación llevada a cabo en los grupos de investigación del Proyecto i-MATH hacia las necesidades de la Industria, buscando la intensificación de la I+D en colaboración en problemas susceptibles de ser tratados con métodos matemáticos, estadísticos o computacionales;
- la introducción de métodos y técnicas matemáticas, estadísticas y de investigación operativa en el sector productivo.

En esta primera edición de los Murcia Study Groups with Industry (véase el enlace correspondiente en la página <http://matematica.nodo.cesga.es/>) han participado como ponentes las empresas: Culmarex, Ambulorca y Areniscas Rosal S.A., pertenecientes a los sectores de Pesca y acuicultura, Transporte y Materiales, respectivamente. Cada uno de los ponentes empresariales presentó un problema susceptible de ser tratado mediante métodos matemáticos y/o estadísticos; en particular, las técnicas matemáticas utilizadas en su análisis fueron Modelos de Predicción, Regresión no Paramétrica, Series de Tiempo, Problemas de Optimización, Sistema Dinámico de decisiones, Investigación Operativa, Problemas de Corte y, Empaquetamiento, Algoritmos Heurísticos . Los problemas estudiados en esta Jornada cubrieron campos diversos: Modelización Estocástica, Diseño y Optimización de Rutas, Localización GPS, Problemas de Corte Óptimo. Este libro presenta, para cada uno de los tres problemas industriales propuestos, una memoria resumen acerca de su planteamiento, su enfoque matemático y su resolución - si ésta ha podido ser completada - o una propuesta para la misma.

Finalmente, cabe subrayar que en esta primera edición de los Murcia Study Groups with Industry se cumplieron los objetivos planteados por los organizadores: dar respuesta a las necesidades planteadas desde industrias y

empresas utilizando herramientas matemáticas y/o estadísticas y promocionar así su uso en la industria, incrementar y fortalecer las relaciones entre las empresas y los grupos de investigación participantes, y abrir nuevas líneas de investigación hacia temas de interés para Empresas y Universidades. Todo ello hizo que la valoración general del evento por parte de los organizadores, los coordinadores académicos de los problemas, los ponentes de las empresas y los asistentes fuese sin duda globalmente positiva.

Murcia, 30 de Marzo de 2012

Los Comités Científico y Organizador:

- Pascual Fernández Hernández. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia.
- Jorge L. Navarro Camacho. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Murcia.
- Alfredo Marín Pérez. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia.
- Blas Pelegrín Pelegrín. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia.
- José Fernández Hernández. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia.
- Manuel Pulido Cayuela. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia.
- Francisco J. Pena Brage. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Santiago de Compostela.

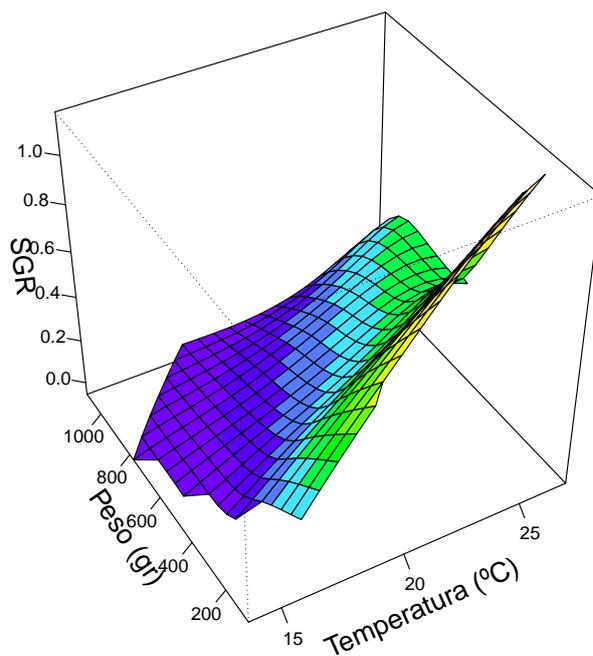
## Estimación de la tasa de alimentación de los peces

---

**Coordinador Académico** Jorge L. Navarro Camacho  
**Universidad o Centro** Universidad de Murcia  
**E-mail** jorgenav@um.es

**Representante de la Empresa** Marilé López Belluga  
**Empresa** Culmarex  
**E-mail** marilo.lopez@culmarex.com

**Grupo de trabajo** Juan Antonio Cano Sánchez (Universidad de Murcia), Rosa Crujeiras Casais (Universidade de Santiago de Comportela), Manuel Franco Nicolás (Universidad de Murcia), Adela Martínez Calvo (Fundación CESGA), Juana María Vivo Molina (Universidad de Murcia)





# Estimación de la tasa de alimentación de los peces

*Jorge L. Navarro Camacho\**      *Mariló López Belluga\*\**

## Resumen

La empresa Culmarex planteó como problema el desarrollo de una herramienta matemática que permita estimar la tasa de alimentación de las doradas y lubinas criadas en jaulas en mar abierto. En este documento se presenta la propuesta elaborada por el grupo de trabajo asignado al problema, la cual se basa en un modelo estocástico que relaciona la tasa de crecimiento de dorada y lubina con la temperatura del agua en la jaula y el peso medio de los peces contenidos en la misma.

**Palabras clave:** FCR (factor de conversión); Predicción; Regresión no paramétrica; Series de tiempo; SFR (tasa de alimentación); SGR (tasa de crecimiento).

**Clasificación por materia AMS:** 62G08; 62M10.

## 1. Introducción

El grupo Culmarex es una compañía líder en el sector de la acuicultura en España que posee granjas marinas de dorada y lubina a lo largo de toda la costa mediterránea española. En la producción de dorada y lubina en jaulas en mar abierto el principal coste es la alimentación, dado que tanto la dorada como la lubina son peces carnívoros con unos requisitos nutricionales muy especiales que demandan unas dietas de elevado coste por su contenido en proteínas y ácidos grasos procedentes, en gran parte, del pescado.

Por este motivo, la empresa está interesada en definir un modelo matemático que les permita conocer la tasa de alimentación de los peces y poder optimizar el proceso de alimentación, minimizando así los costes asociados.

## 2. Planteamiento del problema por parte de la empresa

En el estudio de la tasa de alimentación de la dorada y la lubina deben tenerse en cuenta ciertas variables que influyen en la actividad alimentaria de dichas especies.

---

\*E-mail: jorgenav@um.es

\*\*E-mail: marilo.lopez@culmarex.com

- **VARIABLES AMBIENTALES: TEMPERATURA.** La dorada y la lubina son especies *ectotermas*, es decir, su temperatura corporal no es constante durante todo el año sino que oscila en función de la temperatura ambiental. Por ello, el metabolismo de estos peces (en particular, su actividad alimentaria) está relacionado directamente con la temperatura del agua del mar.
- **VARIABLES BIOLÓGICAS: EDAD/PESO.** Los peces pequeños comen más y con mayor frecuencia, presentando un ritmo o tasa de crecimiento mayor. Este ritmo va disminuyendo con la edad. Existe un periodo crítico, la maduración, durante la cual los peces invierten parte de su energía en la formación de gónadas. Esta biomasa se pierde tras la puesta, con lo que aparecen crecimientos negativos. Debe tenerse en cuenta que la maduración en la dorada y la lubina se produce en etapas distintas de su crecimiento:
  - Dorada. Es hermafrodita *proterándrica*, madurando como macho durante el primer o segundo año y como hembra a partir del tercero o cuarto.
  - Lubina. La diferenciación sexual se produce en la etapa larvaria. Sin embargo, las hembras no maduran durante la primera temporada, por lo que presentan crecimientos superiores que los machos en esa etapa.
- **OTRAS VARIABLES EXTERNAS.** Existen otros factores que influyen en el crecimiento del pez como la dieta (valor energético, composición, etc.), la estrategia de alimentación, la densidad de cultivo, el fotoperiodo, las corrientes, las mareas, el plancton marino, la presencia de parásitos, etc.

A la hora de evaluar la *eficacia* de la alimentación de los peces se manejan los siguientes conceptos:

- **TASA DE CRECIMIENTO (*Specific Growth Rate* - SGR).** Es el porcentaje de crecimiento diario calculado mediante la expresión

$$SGR = (\ln B_f - \ln B_i) \times 100 / \text{tiempo}, \quad (1)$$

donde  $B_i$  y  $B_f$  son la biomasa inicial y final, respectivamente, y la variable *tiempo* se mide en días.

- **FACTOR DE CONVERSIÓN (*Food Conversion Rate* - FCR).** Es la cantidad de alimento necesaria para que el pez gane un kg de peso. Se obtiene mediante

$$FCR = \text{alimento} / \text{crecimiento}, \quad (2)$$

donde *alimento* son los kg de pienso aportados y *crecimiento* es el incremento de biomasa obtenido.

- **Tasa de alimentación (*Specific Feeding Rate* - **SFR**).** Es la cantidad de alimento diario necesario por biomasa de peces. Se calcula multiplicando el factor de conversión por la tasa de crecimiento

$$SFR = FCR \times SGR. \quad (3)$$

Los fabricantes de pienso y algunas empresas de producción elaboran tablas de alimentación para dorada y lubina que indican los kg de pienso diario que hacen falta por cada 100 kg de peces según su tamaño y la temperatura del agua. Estas tablas de alimentación varían según la composición del pienso y permiten obtener la tasa de alimentación *ad hoc* para cada producto. Sin embargo, se observan grandes diferencias entre los valores teóricos de las tasas de crecimiento que se deducen de las tablas y los valores que se observan en la práctica en las jaulas de dorada y lubina.

Por este motivo, la empresa está buscando un modelo matemático que les permita estimar el factor de conversión y la tasa de crecimiento de los peces a partir de la temperatura ambiental del agua y el peso medio de los peces de la jaula. Una vez conocidos el FCR y la SGR, la tasa de alimentación puede ser calculada fácilmente multiplicando ambas cantidades (cf. ecuación (3)).

Para alcanzar este objetivo, Culmarex aportó al grupo de trabajo información histórica real de la temperatura del agua en (variable *temperatura*), el peso medio de los peces en gr (variable *peso*) y la tasa de crecimiento observada (variable *SGR*) para varios lotes de dorada y lubina. Aunque el grupo de trabajo realizó el estudio tanto para el FCR como para la SGR, y con varios de los lotes de dorada y lubina, a continuación se presentarán únicamente los resultados obtenidos para la modelización y la predicción de la tasa de crecimiento de uno de los lotes de dorada, dado que las conclusiones obtenidas en el resto de casos analizados fueron similares.

El lote de dorada seleccionado contenía información mensual de las variables *temperatura* ( $X_1$ ), *peso* ( $X_2$ ) y *SGR* ( $Y$ ) para el período abril 2007 a agosto de 2010. Para poder validar los modelos que se desarrollaron, esta muestra inicial se dividió en dos submuestras: la primera contiene los datos hasta diciembre de 2009 y se empleó para ajustar los distintos modelos propuestos; la segunda submuestra corresponde a la información relativa al año 2010 (de enero 2010 a agosto 2010) y se utilizó para validar los resultados obtenidos con los modelos. Todos los análisis y cálculos desarrollados se realizaron mediante el paquete estadístico *R* (en particular, se emplearon las librerías *stats* y *sm*). Para más información sobre este software estadístico véase Ref. [3].

### 3. Modelización de la tasa de crecimiento (SGR)

En esta sección se analiza la relación existente entre la variable respuesta *SGR* ( $Y$ ) y las variables explicativas *temperatura* ( $X_1$ ) y *peso* ( $X_2$ ). Para describir esta relación se ha considerado en un primer momento un modelo de regresión no paramétrica univariante (una única variable explicativa: o bien  $X_1$  o bien  $X_2$ ). A continuación se ha ajustado un modelo de regresión no paramétrica bivariante (dos variables explicativas:  $X_1$  y  $X_2$ ). Más información sobre los modelos de regresión no paramétrica que se han considerado en este estudio puede encontrarse en Ref. [1].

#### 3.1. Regresión no paramétrica univariante

En primer lugar, se han considerado los modelos de regresión no paramétrica univariante dados por

$$\begin{aligned} \text{Mod.1a} \quad Y &= m_1(X_1) + \varepsilon_1, \\ \text{Mod.1b} \quad Y &= m_2(X_2) + \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $Y$  es la variable respuesta,  $X_k$  es la variable explicativa,  $m_k$  es la función de regresión y  $\varepsilon_k$  es una variable independiente, con media 0 y varianza constante (con  $k \in \{1, 2\}$ ).

Dadas las muestras  $\{(x_{ki}, y_i)\}_{i=1}^n$ , con  $k \in \{1, 2\}$ , los modelos (4) pueden ajustarse empleando los siguientes estimadores no paramétricos de las funciones de regresión  $m_1$  y  $m_2$

$$\hat{m}_1(x) = \frac{\sum_{i=1}^n w_1(x_{1i} - x; h_1)y_i}{\sum_{i=1}^n w_1(x_{1i} - x; h_1)}, \quad \hat{m}_2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n w_2(x_{2i} - x; h_2)y_i}{\sum_{i=1}^n w_2(x_{2i} - x; h_2)}, \tag{5}$$

donde  $w_k$  son funciones de ponderación y  $h_k$  son parámetros de suavizado denominados ventanas. En nuestro caso, se ha realizado un ajuste lineal local, seleccionando las ventanas mediante validación cruzada. En la Fig. 1 pueden verse los datos de la muestra (puntos) junto con las funciones de regresión ajustadas (línea continua). Para analizar la bondad de estos ajustes, se ha contrastado el no-efecto y la linealidad de los dos modelos de regresión univariante, obteniéndose en ambos casos p-valores inferiores a  $\alpha = 0,05$ .

#### 3.2. Regresión no paramétrica bivariante

Se ha considerado también el modelo de regresión no paramétrico bivariante siguiente

$$\text{Mod.2} \quad Y = m(X_1, X_2) + \varepsilon, \tag{6}$$

donde  $Y$  es la variable respuesta,  $X_1$  y  $X_2$  son las variables explicativas,  $m$  es la función de regresión y  $\varepsilon$  es una variable independiente, con media 0 y varianza constante.

En este caso, dada la muestra  $\{(x_{1i}, x_{2i}, y_i)\}_{i=1}^n$ , la función de regresión del modelo (6) se puede estimar mediante

$$\hat{m}(x_1, x_2) = \frac{\sum_{i=1}^n w_1(x_{1i} - x_1; h_1)w_2(x_{2i} - x_2; h_2)y_i}{\sum_{i=1}^n w_1(x_{1i} - x_1; h_1)w_2(x_{2i} - x_2; h_2)}, \quad (7)$$

siendo  $w_k$  funciones de ponderación y  $h_k$  los parámetros de suavizado asociados a cada variable explicativa. Se realizó un ajuste lineal local bidimensional con validación cruzada para la elección de las ventanas, cuyo resultado puede verse en la Fig. 2. Como en el caso unidimensional, se ha contrastado el no-efecto y la linealidad del modelo. Ambas hipótesis se han rechazado con p-valores inferiores a  $\alpha = 0,05$ .

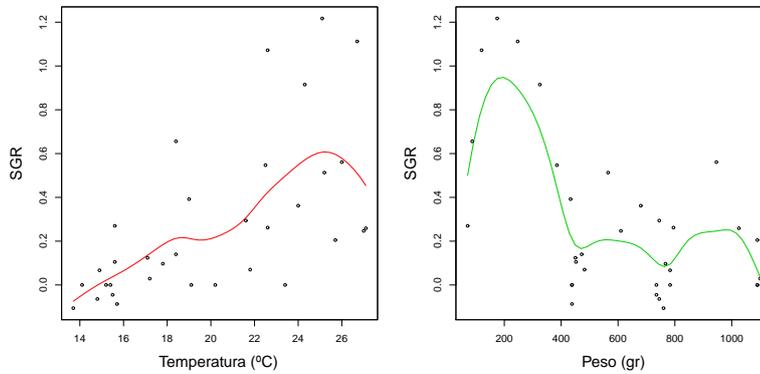


Figura 1: Regresión no paramétrica univariante: Mod.1a *SGR* vs. *temperatura* (izquierda); Mod.1b *SGR* vs. *peso* (derecha).

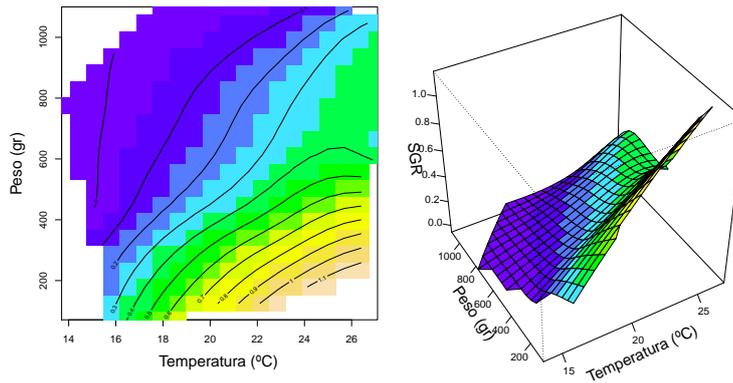


Figura 2: Regresión no paramétrica bivalente: Mod.2 *SGR* vs. *temperatura* y *peso*. Representación 2D de la función de regresión estimada con curvas de nivel (izquierda). Representación 3D de la función de regresión estimada (derecha).

## 4. Predicción de la tasa de crecimiento (SGR)

En el apartado anterior se han propuesto tres modelos de regresión para describir la relación existente entre la SGR y las dos variables explicativas: Mod.1a, Mod.1b y Mod.2 (cf. ecuaciones (4) y (6)). Para ajustar dichos modelos se ha utilizado la información del lote de dorada de los años 2007 a 2009. En esta sección emplearemos los modelos ajustados para predecir los valores de SGR en el año 2010 (de enero a agosto) y comparar dichas predicciones con los valores que se observaron en la muestra real.

### 4.1. Regresión no paramétrica univariante y bivalente

Como primera aproximación hemos tomado los tres modelos ajustados anteriormente y hemos obtenido las predicciones para la SGR sustituyendo en ellos los valores de temperatura y peso observados. En la parte izquierda de la Fig. 4 pueden verse tanto los valores de la SGR reales como las predicciones que se obtienen aplicando los modelos ajustados. Especial interés merecen las predicciones para el año 2010, ya que esos datos no fueron utilizados para ajustar los modelos. Para esas fechas se observa que las predicciones son buenas para los tres primeros meses del año, alejándose de los datos reales en los meses posteriores. En particular, los modelos no capturan la caída repentina que se observa en los datos reales en el mes de abril de 2010.

### 4.2. Series de tiempo. Modelos ARMA/ARIMA

Las predicciones obtenidas en el apartado anterior presentan la desventaja de que es necesario conocer la temperatura y el peso medio de los peces para poder introducirlos en los modelos ajustados y generar un valor para la tasa de crecimiento. Para evitar este problema, y dado que para los datos manejados poseemos la información relativa al mes y el año en el que fueron registrados, hemos optado por tratar las variables *temperatura* y *peso* como series temporales. Para más información sobre el modelado y la predicción con series de tiempo véase Ref. [2].

La serie de temperaturas se ha modelado mediante un ARMA(1,1) con componente estacional, mientras que los pesos se han ajustado mediante un modelo ARIMA(1,1,0) también con componente estacional. En ambos casos, los modelos se ajustaron por máxima verosimilitud utilizando mínimos cuadrados condicionales para los iterantes iniciales. Una vez estimados los parámetros de los modelos, éstos se usaron para predecir los valores de las series para el año 2010. En la Fig. 3 se pueden ver los datos reales observados para ambas variables (línea continua) y los valores predichos por los modelos estimados (línea discontinua), así como una banda de confianza para los mismos (líneas punteadas).

Una vez que disponemos de predicciones para las temperaturas y los

pesos, podemos utilizar estos valores como inputs en los tres modelos de regresión que habíamos ajustados. Los resultados pueden verse en la parte derecha de la Fig. 4. Como ocurría en el apartado anterior, la mejor predicción se obtiene con el modelo bivalente aunque sólo en los primeros meses del año.

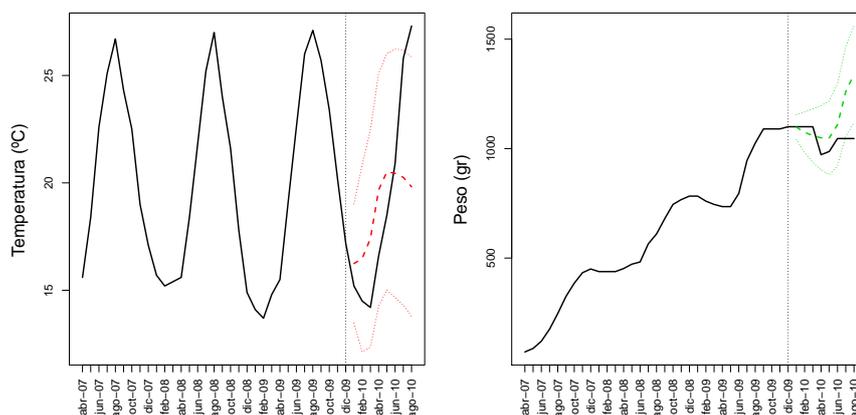


Figura 3: Predicción de *temperatura* (izquierda) y *peso* (derecha) mediante modelos ARMA/ARIMA con componente estacional: datos reales (línea continua), valores predichos (línea discontinua) y banda de confianza para las predicciones (líneas punteadas).

## 5. Conclusiones

Las predicciones generadas por los modelos ajustados aproximan razonablemente los valores de la tasa de crecimiento a corto plazo (uno a tres primeros meses), sobre todo el modelo bivalente que incorpora información de las dos variables explicativas consideradas (*temperatura* y *peso*). Sin embargo, las predicciones no son buenas cuando el horizonte de predicción es más amplio.

Como posibles vías para solucionar las deficiencias observadas en los modelos propuestos se plantea: mejorar el ajuste temporal de las series temperatura y peso; usar otro tipo de ajuste no paramétrico para los modelos de regresión (polinómico local, splines, etc.); modelizar los datos mediante otra clase de modelos como los de regresión dinámica o los funcionales. También se propone a la empresa realizar el estudio directamente con la variable *alimento* (kg de pienso) en vez de con la tasa de crecimiento, o analizar la posibilidad de introducir otras variables explicativas en el modelo como el viento, el tipo de pienso, la temperatura diaria del agua, etc.

Por último, se debe destacar que obtener modelos que ajusten adecuadamente los datos observados en las jaulas permitiría a la empresa realizar

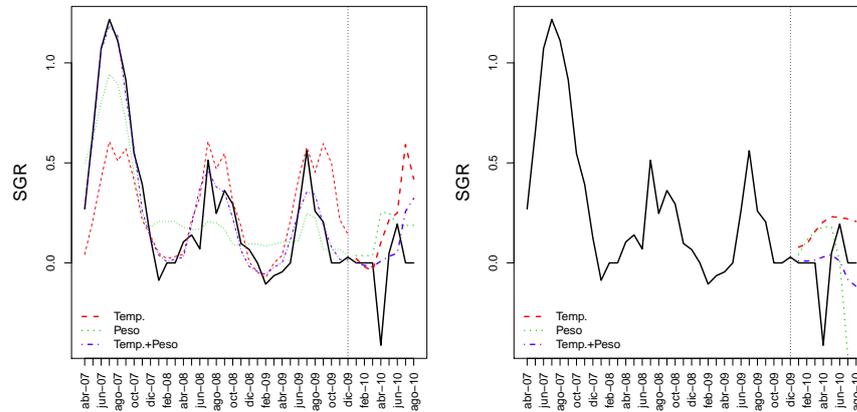


Figura 4: Izquierda: SGR real (línea continua) y predicciones realizadas con los modelos de regresión Mod.1a (línea discontinua), Mod.2b (línea punteada) y Mod.2 (línea discontinua y punteada). Derecha: SGR real (línea continua) y predicciones realizadas con los modelos de regresión Mod.1a (línea discontinua), Mod.2b (línea punteada) y Mod.2 (línea discontinua y punteada) utilizando como inputs los valores predichos por los modelos de series temporales.

distintos tipos de comparativas en su producción: entre especies (dorada y lubina); entre lotes (según mes de introducción en jaula, según granja, según posición dentro de granja, etc.); entre producción ecológica y producción estándar; etc.

## Referencias

- [1] A.W. Bowman and A. Azzalini, *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Oxford Science Publications (1997).
- [2] P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer, New York (1996).
- [3] R Development Core Team, *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, <http://www.R-project.org/> (2011).

## Optimización, configuración, automatización y organización de los recursos de transporte sanitario en área III

---

**Coordinador Académico** Pascual Fernández Hernández  
**Universidad o Centro** Universidad de Murcia  
**E-mail** pfdez@um.es

**Representante de la Empresa** Fernando J. Pérez Martínez  
**Empresa** Ambulancias de Lorca (Ambulorca)  
**E-mail** fernando@ambulorca.com

**Grupo de trabajo** Blas Pelegrín Pelegrín (Universidad de Murcia),  
Alfredo Marín Pérez (Universidad de Murcia), José Fernández Hernández  
(Universidad de Murcia), Manuel Pulido Cayuela (Universidad de Murcia),  
Andrés Martínez Román (Ambulorca), M<sup>l</sup> Teresa Ballesteros Juan  
(Gerencia de Emergencias del 061, Servicio Murciano de Salud), Joaquín  
Morote





# Optimización, configuración, automatización y organización de los recursos de transporte sanitario en área III

*Pascual Fernández Hernández\**      *Fernando J. Pérez Martínez\*\**

## Resumen

Ambulancias de Lorca, Ambulorca, es una empresa dedicada al transporte sanitario en Área III de la Región de Murcia, abarcando una extensión de  $2.500 \text{ km}^2$ , que corresponden a los municipios de Lorca, Águilas, Totana, Puerto Lumbreras y Aledo. Según concierto con el Servicio Murciano de Salud, dispone de 30 vehículos, entre los de transporte colectivo y los de transporte individual, de manera que debe cubrir todos los servicios de su área, y con la condición de que se deben cumplir los horarios de recogida y entrega de los pacientes ("servicios") con un margen de 30 min. La empresa además quiere tener un nivel de satisfacción por parte de los pacientes lo más alto posible, y para ello es capaz que modificar rutas y asignaciones a los vehículos si hay que asignar un nuevo servicio que no estaba recogido con anterioridad.

En este marco, son varios los problemas que se presenta a estudio, como *Organizar el transporte sanitario colectivo desde todos los orígenes a todos los destinos* y *Organizar el transporte colectivo para orígenes y destinos más alejados, tomando como orígenes a Águilas, Puerto Lumbreras, Pedanías Altas, y como destinos los hospitales de referencia del Área III.*

**Palabras clave:** Transporte Sanitario, Rutas óptimas, Sistemas GPS

## 1. Introducción

El Servicio Murciano de Salud divide a la Región de Murcia en seis áreas geográficas, de manera que cada municipio de la región está asignado a una de ellas. El área geográfica que constituye el Área III de la Región de Murcia, está compuesta por los municipios de Lorca, Águilas, Totana, Puerto Lumbreras y Aledo, lo que supone unos 175.000 habitantes, con una superficie total de  $2.500 \text{ km}^2$ .

---

\*E-mail: pfdez@um.es

\*\*E-mail: fernando@ambulorca.com



Los habitantes de este área se distribuyen principalmente en los cinco núcleos principales de población, pero además se cuenta con núcleos de población bastante dispersos denominados Pedanías altas (La Paca, Zarcilla de Ramos, Coy, Avilés, Doña Inés, Las Terreras y La Parroquia). Esta dispersión de la población y el hecho de tener que cubrir obligatoriamente todos los servicios, hace que cualquier problema planteado bajo estas condiciones sea de muy difícil resolución.

Ambulancias de Lorca, Ambulorca, es una empresa dedicada al transporte sanitario desde 1990. Para poder dar el servicio sanitario adecuado, la empresa dispone de una amplia flota de vehículos que se distribuyen en:

- Transporte colectivo.
  - Vehículos equipados con 1 camilla, 1 silla de ruedas y 6 plazas sentadas.
- Transporte individual:
  - Vehículos equipados con 1 camilla y 3 plazas sentadas.

Cada año, el Servicio Murciano de Salud saca a concurso el servicio de transporte sanitario en cada una de sus áreas geográficas. Ambulorca es la empresa encargada de dar este servicio en el área III, y según las condiciones del concurso, el número de vehículos que pueden ser dedicados a cubrir las necesidades de este área es de 30 vehículos, 19 de transporte colectivo y 11 de transporte individual. Con esa dotación de vehículos deben cubrirse todos los servicios relativos al transporte sanitario que se generen en su área de influencia, cumpliendo con los horarios de recogida y entrega de los pacientes ("servicios") con un margen de 30 min., y organizando estos servicios según el tratamiento a recibir y el lugar donde dicho servicio recibirá la atención requerida.

En este escenario, Ambulorca realiza una media de 600 servicios diarios distribuidos en los distintos tratamientos de rehabilitación, cámaras hiperbáricas, diálisis, radioterapias, altas, consultas externas y servicios interhospitalarios. Todo esto hace un total mensual de 11.000 servicios con una media de 22.000 plazas ocupadas, incluyendo los acompañantes.

## 2. Descripción del problema

Los transportes sanitarios en el área III consisten principalmente en desplazamientos desde el punto de recogida del paciente a los hospitales de referencia más importantes, que son los siguientes:

- Hospital Rafael Méndez (Lorca)
- Hospital Virgen del Alcázar (Lorca)
- Hospital Universitario Virgen de la Arrixaca (Murcia)
- Hospital Morales Meseguer (Murcia)
- Hospital Reina Sofía (Murcia)
- Hospital de Molina de Segura (Murcia)
- Cámara Hiperbárica (Cartagena)

Dependiendo del punto de recogida del paciente, se tiene una estimación de las distancias a recorrer en función del centro que sea el encargado de facilitar el servicio al paciente. Estas estimaciones de las distancias vienen recogidas en la siguiente tabla:

| <b>(Km)</b>      | <b>Rafael Méndez</b> | <b>Murcia y<br/>Molina de Segura</b> | <b>Cartagena</b> |
|------------------|----------------------|--------------------------------------|------------------|
| Lorca            | 15                   | 85                                   | 97               |
| Aguilas          | 43                   | 135                                  | 133              |
| Puerto Lumbreras | 35                   | 120                                  | 140              |
| Totana           | 35                   | 66                                   | 73               |
| Aledo            | 50                   | 81                                   | 88               |

A la hora de tomar decisiones sobre las rutas y los pacientes a recoger en cada una de ellas, hay que tener en cuenta varias cuestiones que son básicas y que conformarán la planificación de cada día: tipo de vehículo a utilizar, horarios de recogida y entrega de los pacientes, y tratamiento a recibir. En cuanto a los vehículos, hay que tener en cuenta la posición que ocupan los pacientes en los mismos, pudiendo ir en camilla, en silla de ruedas o sentado. Al tener cada tipo de vehículo un número determinado de cada tipo de plazas, esta información es básica para la configuración de cada ruta. En cuanto a los horarios, teniendo por convenio establecido que el tiempo máximo de demora debe ser de 30 minutos, se debe tener información precisa sobre cual es el punto de origen del paciente, cual es su punto de destino que estará en función del tratamiento requerido, y cual es la posición que debe ocupar en el vehículo, dándose entre pacientes las siguientes relaciones:

1. Mismo punto de origen, distinto horario de tratamiento
2. Mismo punto de origen, mismo horario de tratamiento y distinta posición en la ambulancia.
3. Mismo punto de origen, mismo horario de tratamiento, misma posición en la ambulancia.

Además hay dos cuestiones adicionales que añadir al modelo. Una por requerimiento del propio convenio, y es que se debe dar cobertura a todo el territorio, lo que significa que aunque una ruta esté prevista, si en el último momento surge un nuevo servicio que atender, toda la planificación debe revisarse con vistas a incorporar dicho nuevo servicio a alguna de las rutas para cumplir con todos los compromisos. Además, debido al tipo de servicios que se están gestionando, servicios de transporte sanitario, la empresa trata de unificar los servicios por tratamiento, es decir, todos aquellos servicios que requieran un mismo tratamiento, intentar que formen parte de la misma ruta y compartan el mismo vehículo.

Sobre el escenario descrito, la empresa presentó dos proyectos para su estudio:

#### PROYECTO 1:

*Establecimiento de las distintas rutas desde todos los puntos origen posibles hasta todos los destinos de los hospitales de referencia, con automatización de la situación de los pacientes en las ambulancias, incluyendo horarios y patologías.*

En este caso, los horarios de inicio de salida desde los puntos de origen empezarían a las 07.00 h. de la mañana, mientras que los horarios de finalización en los puntos de origen serían las 19.00 h. de la tarde.

#### PROYECTO 2:

*Planificación de las rutas en cuanto a horarios de llegadas, salidas y número de servicios a realizar desde los puntos de origen más alejados hasta los puntos de destino más alejados también.*

Se consideran como puntos de origen:

Águilas, Puerto Lumbreras, Pedanías altas

y como puntos de destino:

Hospital Virgen de la Arrixaca, Murcia (resto) y Molina de Segura.

considerando en este caso los horarios anteriores tanto de inicio de salida desde los puntos de origen como de finalización en los puntos de origen.

### 3. Análisis de los problemas por parte del grupo de trabajo

Tras la presentación por parte de los responsables de la empresa de los problemas que estimaban podrían ser motivo de estudio por parte del grupo de trabajo, se procedió a tener una serie de reuniones de trabajo con el fin de poner en común ideas y opiniones acerca de los problemas propuestos. En todas las reuniones se invitó a los representantes de la empresa a estar presentes, pues se entendió que dada la complejidad de los problemas propuestos, toda información que éstos pudieran facilitar sería de gran ayuda para encauzar el estudio de los mismos.

Varias fueron las conclusiones de la primera de estas reuniones. Tanto el grupo de trabajo como los representantes de la empresa estuvieron de acuerdo en la complejidad de los problemas presentados, por lo que se decidió intentar elegir uno de ellos para el mejor aprovechamiento de la jornadas. La empresa gestionaba de forma eficiente algunas de las rutas asociadas a los problemas presentados como por ejemplo:

- Transporte a Cartagena (2 rutas)
- Transporte programado de rehabilitación en Aguilas, Puerto Lumberras y Totana (rutas fijas)
- Lorca (rutas con horario fijo en colaboración con el hospital Rafael Méndez)

Con todo esto, se tomó la decisión de centrar el estudio en el problema de la planificación de rutas entre los puntos más alejados del área III.

La empresa planteo su actual metodología para resolver este problema. En concreto, este servicio estaba cubierto por tres rutas fijas origen-destino, que debido a la distancia, tiempo de viaje, y tiempos de entrega y recogida de pacientes, podían realizar varias veces cada día. La información de dichas rutas es la siguiente:

#### **Ruta 1:**

- Origen: Águilas
- Destino: Murcia, Arrixaca y Molina de Segura
- Distancia 150 km.
- Duración de recorrido: 2 horas, más tiempo de subida y bajada de pacientes.

#### **Ruta 2:**

- Origen: Puerto Lumbreras
- Destino: Murcia, Arrixaca y Molina de Segura
- Distancia: 125 km.
- Duración de recorrido: 1 hora y 40 minutos, más tiempo de subida y bajada de pacientes.

**Ruta 3:**

- Origen: Pedanías altas (La Paca, Zarcilla de Ramos, Coy, Avilés, Doña Inés y Las Terreras)
- Destino: Murcia, Arrixaca y Molina de Segura
- Distancia: 170 km.
- Duración de recorrido: 2 horas y 30 minutos, más tiempo de subida y bajada de pacientes.

Los recursos a asignar para estas tres rutas serían 9 vehículos colectivos, con 1 camilla, 1 silla de ruedas y 6 plazas sentados, por vehículo.

Una vez disponible la información de todos los servicios a cubrir cada día, la planificación se lleva a cabo la tarde anterior, de forma manual, teniendo en cuenta la experiencia del operador encargado de la planilla, y dejando el sistema abierto a posibles modificaciones motivadas por incorporaciones no previstas de nuevos servicios antes de comenzar las rutas de un día, o incluso una vez iniciadas éstas, lo cual supone reasignaciones de servicios a vehículos manteniendo las rutas fijas, y respetando los tiempos máximos de demora.

Con todo ello, la planificación debe responder a las siguientes cuestiones:

1. Definición de los horarios de llegada a los puntos de destino en base a la distancia de los puntos de origen.
2. Definición del número de pacientes posibles en cada horario de llegada.
3. Definición de horario de salida desde los puntos de destino a los puntos de origen.
4. Definición del número de pacientes posibles en cada horario de salida.

Tras una segunda reunión del grupo de trabajo, se decidió trasladar las reuniones del segundo día de las jornadas a la sede de la empresa en Lorca, con el fin de estudiar sobre el terreno la problemática que para la empresa planteaba el problema elegido, y constatar en directo la forma en la que actualmente se le daba solución al mismo.

La empresa, además de mostrar todas sus instalaciones, puso a disposición del grupo de trabajo su histórico de datos, procedente de un potente

sistema de recogida de datos de servicios necesario para llevar a cabo una correcta planificación día a día de los mismos. Además, cada uno de los vehículos de la empresa cuenta con un sistema de localización GPS, identificando por colores en un sistema de pantallas el estado de cada uno de ellos, ya sea recogiendo un servicio, en ruta, dejando un servicio o parado a la espera de nueva ruta. Además, el localizador incorpora datos de origen-destino de la ruta, servicios que en ese momento transporta, así como número y tipo de plazas libres en cada vehículo, lo cual ayuda a reasignar nuevos posibles servicios. Con la previsión de servicios del día siguiente, cada tarde se procede de forma manual a la asignación de servicios a vehículos y rutas, teniendo en cuenta los requerimientos del convenio con el Servicio Murciano de Salud y las propias exigencias de la empresa enfocadas a maximizar un transporte sanitario de calidad.



#### 4. Conclusiones

Tras estudiar el problema presentado por la empresa en las diferentes reuniones del grupo de trabajo, tanto en la sede de las jornadas como en la propia empresa, el grupo pudo concretar la naturaleza del mismo y estructurarlo con el fin de proponer unas pautas de actuación.

El Problema de la Planificación del transporte sanitario colectivo entre puntos más lejanos del área III de la Región de Murcia tiene varios objetivos a considerar:

1. Tiempos de espera de los pacientes.
2. Calidad del servicio.
3. Costes.

Esto supone que al ser considerado un problema multiobjetivo, éstos entrarán en conflicto necesariamente a la hora de encontrar una solución

óptima del problema, por lo que ya se puso sobre la mesa que se trataría de encontrar propuestas de solución, y el órgano decisor, en este caso la empresa, teniendo en cuenta las propuestas y sus intereses, sería el encargado de decidir cuál se ajustaría mejor a las pretensiones de la empresa.

En un principio, la empresa no contemplaba como cuestión a decidir el dónde estuvieran localizados los vehículos antes de iniciar cada día de trabajo, e incluso su mejor ubicación tras terminar una determinada ruta, pues hasta el momento estas decisiones estaban fijadas en el modelo. Los vehículos tenían fijadas sus localizaciones al inicio de cada día en diferentes puntos de la zona, lo que llamaban "cocheras". Se dio a entender a la empresa que esta cuestión era muy importante a la hora de reducir costes, y que podría contribuir a disminuir los tiempos de espera de los pacientes, y por tanto, mejorar la calidad del servicio.

Con todo ello, se plantearon como variables del problema las siguientes:

- Ventanas de tiempo (origen y destino).
- Ruta a seguir.
- Composición de los vehículos.
- Localización de los vehículos.

y todas ellas restringidas por las condiciones del convenio en materia de tiempos máximos de espera, y por las horas de inicio de tratamiento que cada paciente ya tenía fijadas.

Después todo este estudio, se elevó a la empresa la siguiente **PROPUESTA** de actuación:

*Teniendo en cuenta que toda la planificación podía verse alterada por tener que incorporar post-optimización un nuevo servicio, todo el modelo debería ser integrado en un SISTEMA DINÁMICO de decisiones, que tuviera las siguientes características:*

- *Reoptimizar tras cada incidencia.*
- *Realimentación del sistema periódicamente.*
- *Sistema interactivo.*
- *Código abierto.*
- *Válido para sistema GPS actual y toma de datos.*

En el desarrollo de este proyecto el grupo consideró la necesidad de incorporar nuevos miembros capaces de dar soporte técnico a las ideas allí presentadas, así como la necesidad de buscar subvenciones para sufragar los gastos que se generarían, tanto de coste de personal como de material adicional. Se planteó la posibilidad solicitar un proyecto de investigación en esta

línea que tuviera asociado un becario que fuese el encargado de realizar todo el soporte informático necesario para integrar el sistema dinámico propuesto con el sistema GPS y de pantallas de la empresa. En esta línea, en la última reunión del grupo, se contó con la presencia de un responsable del Servicio Murciano de Salud, el cual se manifestó muy interesado por el proyecto y se comprometió a intentar buscar financiación para el mismo.

Para llevar a cabo este proyecto, se plantearon las siguientes fases de actuación:

1. Fase de toma de contacto Empresa-Grupo.
2. Fase de recogida de información del problema.
3. Fase de definición del problema.
4. Recopilación de literatura.
5. Métodos de optimización del problema.
6. Diseño del soporte informático.

Aunque las jornadas hayan sido el germen de este posible proyecto conjunto, y las primeras fases del mismo se hayan iniciado en las reuniones del grupo de trabajo, el decidir llevarlo a cabo de forma definitiva quedo supeditado a la obtención de la financiación necesaria. El grupo animó a la empresa a buscar también por su parte financiación, con la idea de que una vez desarrollado este proyecto, éste podría ser exportado a otras áreas geográficas de la región, y también a otras regiones de España, de manera que el coste de llevarlo a efecto podría verse ampliamente compensado en un futuro.

## Referencias

- [1] R.C. Larson and A.R. Odoni: URBAN, *Operations Research*, Prentice-Hall, 1981
- [2] N. Ahituv and O. Berman, *Operations Management of Distributed Service Networks*, Plenum Press, 1998
- [3] Fundación Nacional del Transporte Sanitario, *Libro Blanco del Transporte Sanitario*, 2005.



## Problemas matemáticos en el sector de los materiales de construcción

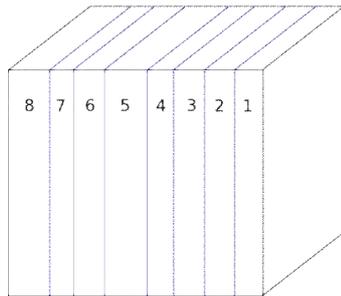
---

**Coordinador Académico** Francisco José Pena Brage  
**Universidad o Centro** Universidade de Santiago de Compostela  
**E-mail** fran.pena@usc.es

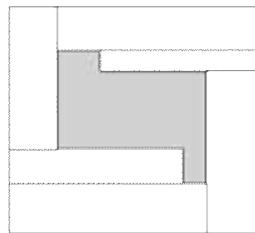
**Representante de la Empresa** Catalina Sánchez Robles  
**Empresa** Areniscas Rosal S.A.  
**E-mail** catalina@areniscasrosal.com

**Grupo de trabajo** Alfredo Bermúdez de Castro (Universidade de Santiago de Compostela), José Fernández Hernández (Universidad de Murcia)

Monohilo (guillotinado,  
1 período)



Discopuente (no  
guillotinado)





# Problemas matemáticos en el sector de los materiales de construcción

*Francisco José Pena Brage\**      *Catalina Sánchez Robles\*\**

## Resumen

La empresa Areniscas Rosal dispone de varias máquinas para el corte de piedra. Los problemas matemáticos relacionados con este problema se encuadran en la investigación operativa. Las condiciones del corte influyen en gran medida en las técnicas a usar. En este trabajo se ha considerado modelar el corte, tanto como problema de *cutting stock*, como problema de empaquetamiento irregular.

**Palabras clave:** corte óptimo; cutting stock; irregular packing

**Clasificación por materia AMS:** 90B99, 90C30

## 1. Introducción

Gracias a los contactos habidos a través del proyecto i-MATH, la empresa Areniscas Rosal ha planteado diversos problemas de su interés relativos al corte de piedra. Los tipos de máquinas con los que cuenta esta empresa se engloban en dos: sistema cortabloques-encabezadora y monohilo-discopuente.

Respecto de la primera modalidad de corte, el departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela (USC) ha estudiado el corte óptimo de bloques de piedra mediante un guillotinado de tres períodos. Gracias a ese trabajo, dispone de programas informáticos para su resolución, que pueden ser adaptados a las necesidades de la empresa.

Respecto de la segunda modalidad de corte, la dificultad de la implementación de los algoritmos adecuados para este problema desaconseja realizarla en este proyecto. En contrapartida, se puede realizar una búsqueda del software comercial que se adapte mejor a las necesidades de la empresa.

## 2. Planteamiento del problema por parte de la empresa

Se trata de elaborar un software y seleccionar aplicaciones informáticas para optimizar diferentes modalidades de corte de bloques de piedra, así como calcular el coste de un pedido.

---

\*E-mail: fran.pena@usc.es

\*\*E-mail: catalina@areniscasrosal.com

Las modalidades de corte aparecen explicadas detalladamente en la sección siguiente. En breve, la **primera modalidad de corte** corresponde al:

- Corte de bandas con la máquina cortabloques y, posteriormente, corte de cada banda en piezas con la encabezadora.
- Corte de tablas con la maquina monohilo y, posteriormente, corte de cada tabla en bandas y cada banda en piezas, con la discopuente.

La **segunda modalidad de corte** corresponde al corte de piezas irregulares con la máquina monohilo.

### 3. Algoritmos y aplicaciones para corte de piedra

Los problemas planteados por la empresa Areniscas Rosal S.A. pueden encuadrarse dentro de los denominados de *corte y empaquetamiento*. Hay excelentes revisiones bibliográficas sobre ellos como, por ejemplo, en Washer ref. [5].

#### 3.1. Corte guillotinado de paralelepípedos

De los problemas de corte y empaquetamiento, el más conocido es el de *corte guillotinado*, es decir, cuando se corta un objeto de extremo a extremo. Se denomina *período* al cambio de dirección del corte realizado por la guillotina. Por ejemplo, una hoja de papel se puede cortar verticalmente en tiras, con un guillotinado de un período. Si cada tira vertical se corta horizontalmente, en conjunto, la hoja ha sufrido un corte guillotinado de dos períodos.

Este enfoque puede aplicarse al problema de cortar bandas con la máquina cortabloques y, posteriormente, cortar cada banda en piezas con la encabezadora, como se muestra en la Figura 1. En ella, las bandas obtenidas con el cortabloques están numeradas según el orden de extracción. De acuerdo con la información de la empresa, es habitual que las bandas consecutivas (por ejemplo, de la 1 a la 8) tengan la misma anchura. Eso nos permite suponer que los cortes azules son rectos, es decir, se comportan como si esos cortes se hubiesen obtenido por guillotinado. De este modo, se puede interpretar que la máquina cortabloques produce un guillotinado de dos períodos, en anchura y grosor, mientras que la encabezadora produce un guillotinado de un período, en longitud.

Del mismo modo, un uso sencillo de las máquinas monohilo y discopuente puede verse como un corte guillotinado de tres períodos (ver Figura 2). Con este tipo de corte, la monohilo se encarga de producir tablas mediante un guillotinado en grosor. Luego la discopuente cortaría dichas tablas en bandas (corte verde) y, tras girar noventa grados la guillotina, cortaría cada banda en piezas (corte rojo).

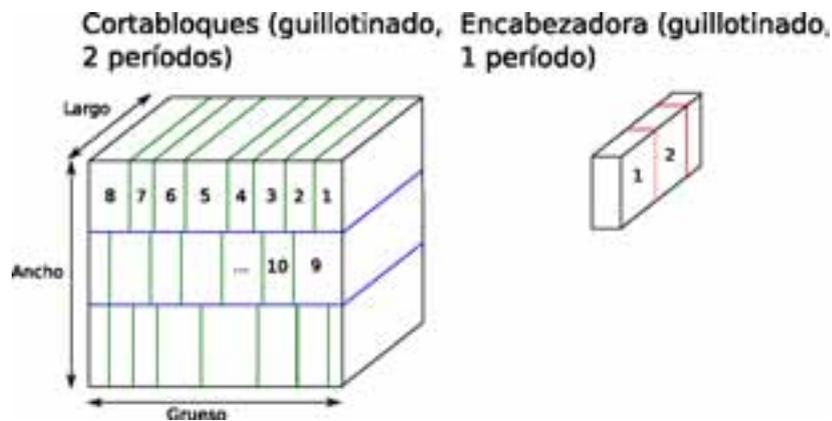


Figura 1: Corte mediante cortabloques y encabezadora.

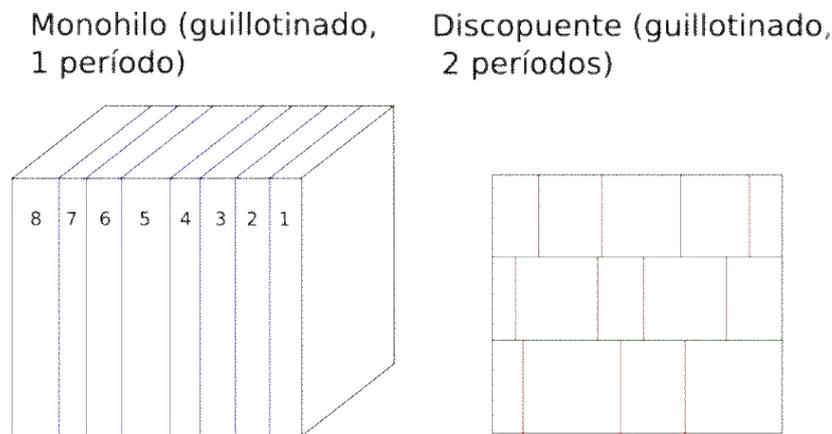


Figura 2: Corte de tres guillotinos mediante monohilo y discopuente.

La ventaja del tipo de problemas es que cada período del corte guillotinado puede verse como un problema de optimización unidimensional, denominado *problema de cutting stock*:

Dados una serie de objetos grandes de longitud  $L$ , se trata de cortar objetos pequeños de  $P$  tipos distintos. El objeto de tipo  $i$ , con  $i \in \{1, \dots, P\}$ , tiene longitud  $w_i$  y, en la solución del problema, deben cortarse  $b_i$  unidades. Un patrón de corte será un subconjunto de objetos pequeños que pueden cortarse de un objeto grande.

Una solución del problema anterior consiste en especificar qué patrones de corte usar, y cuántas veces usar cada uno, para conseguir cortar todos los objetos pequeños. La solución será óptima si no es posible obtener otra solución que use un menor número de objetos grandes para obtener todos

los objetos pequeños demandados.

Una dificultad habitual para su resolución deriva del hecho de que el número de posibles patrones de corte puede ser muy grande. La forma clásica de evitar esta dificultad, propuesta por Gilmore y Gomory ref. [2] consiste en considerar inicialmente unos pocos patrones de corte e ir aumentando su número hasta obtener una solución aceptable. Se han propuesto muchas variantes a este algoritmo como, por ejemplo, la modificación de Haessler ref. [3] para tener en cuenta la optimización de recortes.

El departamento de Matemática Aplicada de la USC dispone de programas informáticos para la resolución de este tipo de problemas.

### 3.1.1. Corte guillotinado de más de tres períodos

El corte de tablas realizado por la discopuente puede complicarse al aumentar el número de períodos. Sería el caso mostrado en la Figura 3, en el que el corte de color malva indica un período adicional.

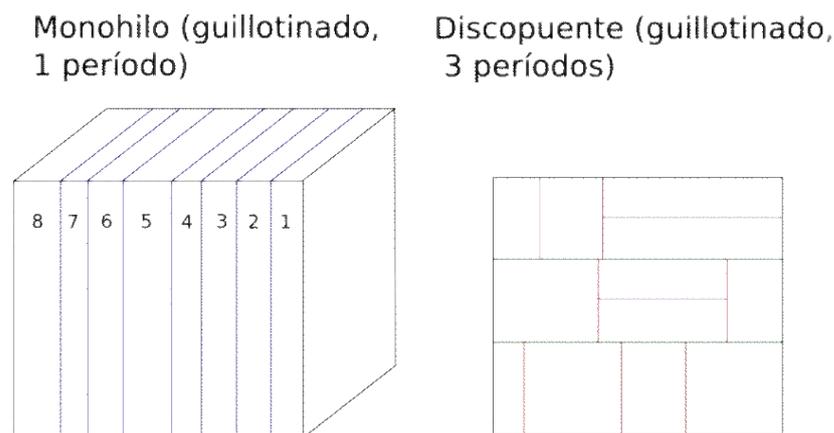


Figura 3: Corte de cuatro guillotinos mediante monohilo y discopuente.

Este caso puede verse como una evolución del anterior, en el que existe un bucle externo para evaluar qué piezas pueden cortarse en el tercer período, es decir, piezas cuya anchura sumada coincidiese con la longitud de otra pieza.

### 3.2. Corte no guillotinado de paralelepípedos

Una complicación adicional en el discopuente sería corte no guillotinado (ver Figura 4). Este tipo de problemas se denomina en la literatura *bin packing problem*.

En la literatura, hay varios tipos de algoritmos para su resolución: actualmente, el mejor algoritmo heurístico para este tipo de problemas es el algoritmo G4 de Scheithauer y Terno ref. [4].

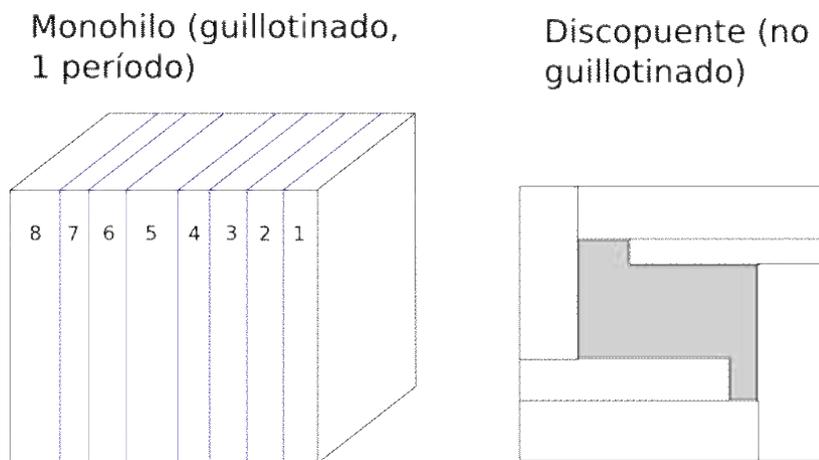


Figura 4: Corte no guillotinado mediante monohilo y discopunte.

Al ser un problema bidimensional y tratarse de la colocación de piezas rectangulares, la implementación de este tipo de algoritmo es una tarea factible. Existen códigos implementados, como en ref. [6], y también es posible obtener licencias de paquetes comerciales, como ref. [7]

### 3.3. Corte de piezas irregulares con la máquina monohilo

El problema más complicado consiste en el corte de piezas irregulares con la máquina monohilo. Se trata de un problema bidimensional, en la que aparecen piezas no rectangulares. Este tipo de problemas se conoce con el nombre de *2D irregular packing problems* o, también, *nesting problems*.

El caso más sencillo corresponde al caso de piezas convexas (círculos, hexágonos, . . .). Algunos trabajos preliminares proponían encerrar estas piezas en rectángulos, para pasar a un problema donde las piezas ya eran rectangulares, y finalmente, optimizar la colocación de las piezas originales con pequeños movimientos respecto de la posición asignada. Este enfoque también serviría para algunas molduras en forma de L que se pudiesen cortar por pares, formando un rectángulo.

En un caso general, para piezas no convexas o muy irregulares, los algoritmos habituales abordan el problema en tres fases:

1. Se construyen una serie de patrones de corte: cada patrón de corte se crea especificando un orden de las piezas a cortar, para luego colocar dichas piezas en la tabla siguiendo un procedimiento. Es habitual seguir un método *Bottom-Left*, es decir, las piezas se colocan en la tabla lo más a la izquierda y hacia abajo posible, en ese orden.
2. Se evalúa la calidad de dichos patrones de corte.

3. Se generan nuevos patrones de corte con la información anterior. La generación de nuevos patrones puede seguir métodos heurísticos, como la modificación aleatoria del orden de las piezas de los mejores patrones (que recuerda a los algoritmos genéticos, también utilizados para este fin) o métodos de *simulated annealing*, pensados para evitar caer en óptimos locales.

El proceso se repite hasta convergencia. El paso más complejo de todo el proceso es la construcción efectiva de los patrones de corte: las piezas deben colocarse en la tabla de forma que no se solapen. El método más sencillo, que consiste en dividir en "píxeles" tanto la tabla como las piezas para estudiar el solapamiento, no es muy útil en el proceso iterativo anterior. Otro método posible es usar trigonometría directa (con la ayuda de la función D), pero en este método el coste computacional está ligado al número de vértices de la frontera poligonal de las piezas: si la pieza tiene alguna frontera curva, debe ser aproximada por polígonos, lo que puede ralentizar el proceso. El mejor método en la actualidad es el denominado *Non Fit Polygon*, que permite trabajar con bordes curvos de forma natural. Sin embargo, como indican Burke et al. ref. [1] no es sencillo programar un método NFP robusto. Finalmente, el uso de la función "Phi" permite indicar la posición relativa de dos objetos concretos. Esta técnica sólo sirve para geometrías predefinidas (círculos, cuadrados, etc.)

En este caso, la dificultad de la implementación desaconseja realizarla por nuestros medios. Aunque existen librerías comerciales para este tipo de problemas, como ref. [8], suelen estar pensadas para su embebimiento en el software de máquinas de corte. Debido a la necesidad de definir piezas con bordes curvos, algún tipo de programa de dibujo es necesario para proporcionar las piezas al código de optimización, por lo que es habitual encontrar software comercial que lee formatos de CAD, como ref. [9], [10].

Tras contactar con varias empresas del sector, se obtuvieron los siguientes precios estimativos:

- *NestLib* (<http://nestlib.geometricglobal.com/>): comercializan la librería a 6500 € la primera licencia. Si se desea un producto final se debe contactar con otras empresas que redistribuyen la librería con su propia interfaz.
- *My Nesting* (<http://www.mynesting.com/>): El coste no es por licencia de uso sino por cada vez que se exportan los resultados de una optimización. Dicho coste ronda los \$5-\$7.5 por exportación (aproximadamente, 3.5 €– 5.2 €). En su web hacen una comparación de precios con un software tradicional (de pago por licencia), para el que ellos estiman un coste de \$5000 (aprox., 3455 €).

La misma empresa comercializa AptiaNest, que funciona de manera tradicional, costando la licencia £3,800 (aproximadamente, 4279 €).

- *MTC Software* ([www.mtc-software.com/](http://www.mtc-software.com/)): Venden su programa por módulos. Dependiendo del módulo escogido cuesta entre 2.500 € y 8.000 €.
- *Astra S-Nesting* (<http://www.techno-sys.com/>): la versión profesional cuesta \$2000 (aproximadamente, 1382 €).
- *Plus2D* (<http://www.nirvanatec.com/>), ronda los 1500 €, aunque parece limitado a piezas asimilables a rectángulos o aros.

## 4. Conclusiones

En este trabajo se han analizado los distintos tipos de corte que se realizan en la empresa Areniscas Rosal S.A. Los problemas de corte óptimo a los que dan lugar se han encuadrado entre los *problemas de corte y empaquetamiento*, estudiados en investigación operativa.

Respecto de la primera modalidad de corte, se propone reutilizar programas informáticos realizados por la Universidad de Santiago de Compostela. Respecto de la segunda modalidad de corte, se propone realizar una búsqueda del software comercial que se adapte mejor a las necesidades de la empresa.

## Referencias

- [1] Burke, E. K., Hellier, R. S. R., Kendall, G. y Whitwell, G. Irregular Packing Using the Line and Arc No-Fit Polygon. *Operations Research*, 58(4):948-970, 2010.
- [2] Gilmore, P. C. y Gomory, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Res.*, 9(1):849-859, 1961.
- [3] Haessler, R. W. Selection and design of heuristic procedures for solving roll trim problems. *Management Science*, 34(12):1460-1471, 1988.
- [4] Scheithauer, G. y Terno, J. The G4-Heuristic for the pallet loading problem. *Journal of the Operational Research Society*, 46:511-522, 1996.
- [5] Wang, P. Y. y G. Wäscher, G., editors. *Cutting and Packing* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2002. *European J. of Oper. Res.*, 141 (2002) no. 2
- [6] <http://www.diku.dk/hjemmesider/ansatte/pisinger/3dbpp.c>
- [7] <http://www.tmachines.com/cutlogic-2d.htm>
- [8] <http://nestlib.geometricglobal.com>

[9] <http://www.mynesting.com>

[10] <http://www.sigmanest.com>

## Agradecimientos

---

El Comité Organizador desea agradecer todas las inestimables contribuciones de los ponentes de las empresas, los coordinadores académicos de las propuestas, así como de los participantes en los distintos grupos de trabajo, que han contribuido al éxito científico de este evento.

También desea expresar su gratitud a las diversas instituciones que han colaborado económicamente en su financiación: el Ministerio de Economía y Competitividad a través del Proyecto Ingenio Mathematica i-MATH del programa Consolider-Ingenio 2010; la Universidad de Murcia y la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia que cedió los locales para el desarrollo de las jornadas.

Por último, desea expresar su agradecimiento a la Gestora de Valorización Tecnológica del Proyecto i-MATH (Ana Belén Fernández Gómez) y a los técnicos de Consulting y Computing del Nodo CESGA que con su minucioso trabajo y dedicación han permitido el éxito organizativo de las Jornadas y que han contribuido directamente en la edición de este libro.





## S U M A R I O

|  |    |
|--|----|
| Estimación de la tasa de alimentación de los peces,  | 7  |
| Optimización, configuración, automatización y organización de los recursos de transporte sanitario en área III | 19 |
| Problemas matemáticos en el sector de los materiales de construcción   | 31 |

