

 nodo.cesga

consolider ingenio
i-Math ingenio 2010
matemática

III JORNADAS DE CONSULTA MATEMÁTICA PARA EMPRESAS E INSTITUCIONES i-Math 2008-2011



**Editores: Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela, José Durany Castrillo,
Peregrina Quintela Estévez**

8, 9 y 10 de Noviembre 2010
Facultad de Matemáticas. Campus Vida, Santiago de Compostela



III JORNADAS DE CONSULTA MATEMÁTICA PARA EMPRESAS E INSTITUCIONES

Santiago de Compostela, 8-10 de Noviembre de 2010



Universidade de Vigo



Editores

Alfredo Bermúdez de Castro López Varela
Peregrina Quintela Estévez

Universidade de Santiago de Compostela

alfredo.bermudez@usc.es; peregrina.quintela@usc.es

Jose Durany Castrillo

Universidade de Vigo

durany@dma.uvigo.es

Imprime: NINO-Centro de Impresión Digital
Rosalía de Castro, 58
Santiago de Compostela

ISBN: 978-84-694-0567-3

Índice

Introducción	5
Descarga Remota de Graneles (BAT Project)	9
<i>Javier González Cotera, European Bulk Handling Installation, S.A.</i>	
<i>Bartomeu Coll Vicens, Universitat de les Illes Balears</i>	
Diseño de una muestra entre varios extractos de población en el sector cosmético profesional y propuesta de ponderación de las respuestas	23
<i>Joaquín Sandoval Pérez, Germaine de Capuccini</i>	
<i>Manuel Febrero Bande, Universidade de Santiago de Compostela</i>	
Simulación numérica de tejidos biológicos	33
<i>Nora Fernández Pérez, Tecnologías Avanzadas Inspiralia S.L.</i>	
<i>Patricia Barral Rodiño, Universidade de Santiago de Compostela</i>	
Agradecimientos	41

Introducción

Los días 8, 9 y 10 de Noviembre de 2010, el Nodo CESGA del proyecto Consolider i-MATH, organizó en Santiago de Compostela la tercera edición de las **Jornadas de Consulta Matemática para Empresas e Instituciones. i-MATH 2008-2011**.

El objetivo de estas Jornadas es generar un espacio anual de encuentro entre empresas e instituciones y grupos de investigación del proyecto i-MATH de manera que se

- promocioe la Matemática en el entorno empresarial buscando activamente proyectos de investigación y desarrollo en donde la Matemática tenga una especial relevancia;
- intensifique la I+D entre los grupos de investigación del proyecto MATHEMATICA y los correspondientes a las industrias, en problemas susceptibles de ser tratados con métodos matemáticos, estadísticos o computacionales;
- actualice el mapa de demanda tecnológica.

En esta tercera edición de las Jornadas (véase el enlace correspondiente en la página <http://mathematica.nodo.cesga.es/>) han participado como ponentes las empresas European Bulk Handling Installation, S.A., Germaine de Capuccini y Tecnologías Avanzadas Inspiralia S.L., pertenecientes a los sectores de Transporte, Cosmética y Materiales, respectivamente. Cada uno de los ponentes empresariales presentó un problema susceptible de ser tratado mediante métodos matemáticos y/o estadísticos; en particular, las técnicas matemáticas utilizadas en su análisis fueron Modelización, Simulación numérica, Muestreo, Regresión y Análisis de encuestas. Los problemas estudiados en estas Jornadas cubrieron campos diversos: realzamiento de imágenes digitales, escaneo en 3D, estadística y mecánica de sólidos. En las Jornadas han participado un total de 33 personas entre estudiantes, investigadores, profesores y técnicos de empresas que han contribuido a un mayor éxito de las mismas. Este libro presenta, para cada uno de los tres problemas industriales propuestos, una memoria resumen acerca de su planteamiento, su enfoque matemático y su resolución - si ésta ha podido ser completada - o una propuesta para la misma.

Finalmente, cabe subrayar que en esta tercera edición de las Jornadas se cumplieron los objetivos planteados por los organizadores: dar respuesta a las necesidades planteadas desde Industrias y Empresas utilizando herramientas matemáticas y/o estadísticas y promocionar así su uso en la industria,

incrementar y fortalecer las relaciones entre las empresas y los grupos de investigación participantes, y abrir nuevas líneas de investigación hacia temas de interés para Empresas y Universidades. Todo ello hizo que la valoración general del evento por parte de los organizadores, los coordinadores académicos de los problemas, los ponentes de las empresas y los asistentes fuese sin duda globalmente positiva.

Santiago de Compostela, 6 de Mayo de 2011

El Comité Organizador:

- Alfredo Bermúdez de Castro López Varela. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.
- Jose Durany Castrillo. Departamento de Matemática Aplicada II, Universidade de Vigo.
- Peregrina Quintela Estévez. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.

Descarga Remota de Graneles (BAT Project)

Coordinador Académico Bartomeu Coll Vicens
Universidad o Centro Universitat de les Illes Balears

Representante de la Empresa Javier González Cotera
Empresa European Bulk Handling Installation, S.A.

Especialista Moisés Vilar Vidal
Empresa Universidade de Santiago de Compostela

Grupo de trabajo Juan Gabriel Gomila Salas (UIB), Aurea María Martínez Varela (UVigo), Peregrina Quintela Estévez (USC), Jerónimo Rodríguez García (USC), Catalina Sbert Juan (UIB)



Descarga Remota de Graneles (BAT Project)

*Bartomeu Coll Vicens** *Javier González Cotera***

Resumen

Propuesto por la empresa European Bulk Handling Installation, empresa dedicada a la descarga de grandes buques, dentro del proyecto BAT, el problema planteado se basa en la mejora de las imágenes obtenidas por control remoto en el proceso de descarga. El objetivo básico es la mejora en la visualización de las imágenes que se obtienen a partir de una serie de cámaras de vídeo de alta calidad (siete por grúa) que permiten al maquinista tener una vista completa del proceso de descarga. Se han estudiado algunos modelos, algunos de ellos clásicos, en el realzamiento de imágenes digitales que se obtienen de la bodega y que permiten la modificación de la información de la imagen dada por el histograma. Otra propuesta pasaría por un modelo de escaneo 3D para obtener la información volumétrica del material dentro de la bodega. Finalmente, estos modelos se han aplicado a un conjunto de tres imágenes, dos de ellas extraídas cuando se enfoca la bodega y la tercera partir de una foto hecha sin flash.

Palabras clave: control remoto; realzamiento de imágenes; escaneo 3D.

Clasificación por materia AMS: 97M10, 97R30

1. Introducción

Este proyecto nace a partir de un problema aplicado propuesto por la empresa European Bulk Handling Installation, empresa dedicada a la descarga de grandes buques, que transportan materiales en las bodegas (carbón y otros materiales). La empresa participa en un proyecto innovador de I+D+i, el BAT project. El BAT está compuesto por una cabina en tierra que controla remotamente las grúas o pórticos. Para ello, se disponen una serie de cámaras de vídeo de alta calidad (siete por grúa) que permiten al maquinista tener una vista completa del proceso de descarga. También se implementa el manejo de todas y cada una de las funcionalidades de la grúa mediante un PLC (control del pórtico, cabina, cuchara, etc).

*E-mail: tomeu.coll@uib.cat

**E-mail: jgonzalez@ebhi.es

Dependiendo de las condiciones atmosféricas, se pueden dar algunos problemas que pasan por una pérdida de contraste de las imágenes, y sobretodo, en la zona de la bodega. Unas buenas condiciones de visibilidad son imprescindibles para que los operarios puedan realizar su trabajo eficientemente. El objetivo del proyecto pasa por realizar un procesamiento on-line de la imagen antes de mostrarla al operario intentando eliminar o suavizar este contraste y poder distinguir el contenido de la bodega.

Dentro del campo del procesamiento de imágenes digitales, el contraste de imágenes es uno de los temas que presenta mayor interés en su investigación. En algunos casos, las imágenes o fotos son tomadas en un contraste bajo, debido a las malas condiciones de luz de la escena (por ejemplo, las fotos tomadas en la noche o por el contrario, con mucha luz debido a los rayos del sol). Como consecuencia, la imagen está saturada al negro o bien al blanco, lo que la hace inapropiada para la inspección visual o la simple observación de ella.

Una de las técnicas que se usan para el realce de la imagen es la modificación de la distribución de los valores de los píxeles de la imagen o histograma. En este caso una “dilatación” de la función histograma hace que los valores de la imagen queden mejor distribuidos, y como consecuencia, también el contraste. Por lo tanto, la modificación del histograma y en particular la ecualización (caso particular cuando la distribución es uniforme) es una de las más básicas y común operación de cambio de contraste en el procesamiento de imágenes [3].

A partir de esta idea, se han desarrollado posteriormente otros modelos basados en una ecuación en derivadas parciales, del tipo evolución del flujo, que asintóticamente tiende al histograma constante. Por lo tanto, se obtiene la solución, si existe, de la imagen contrastada via la ecualización del histograma [2]. Otros modelos pasan por la teoría del Retinex, balance de color, [7], [4].

2. Primeros algoritmos para el realce de las imágenes del proyecto

En esta sección presentamos un conjunto de algoritmos sobre los que nos hemos basado para la experimentación final. La idea ha sido seleccionar una serie de algoritmos, la mayoría clásicos en el problema de realce de imágenes, que nos permitieran dar una primera respuesta al problema planteado.

La mayoría de ellos se basan en una modificación del histograma de la imagen, o función que nos da, para cada valor del nivel de gris, el número de píxeles que tienen este valor dado. Esta modificación se puede realizar por ejemplo imponiendo que el nuevo histograma tenga una función de distribución uniforme (método de ecualización) o bien a partir de una transformación afín del mismo histograma.

2.1. Transformación afín

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el dominio de la imagen u , donde $u : \Omega \rightarrow [a, b]$. Si $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es una función dada, creciente, la imagen $v = h(u)$ se llama una transformación homomórfica de u . Esta función h puede ser una transformación afín o bien lineal/afín a trozos.

2.2. Ecuación global del histograma

El método de la ecualización del histograma se basa en el hecho que la función de distribución del nuevo histograma es uniforme. Esta operación de modificación del histograma es una de las más básicas y más usadas en el procesamiento de imágenes [3].

El caso particular de la ecualización del histograma se corresponde a seleccionar la función h como la función de distribución H de u :

$$H(\lambda) = \frac{\text{Area}\{x \in \Omega, u(x) \leq \lambda\}}{\text{Area}(\Omega)}.$$

Si H es estrictamente creciente, entonces la nueva imagen

$$v(x) = (b - a)H(u(x)) + a$$

tiene una función de distribución uniforme en $[a, b]$.

2.3. Ecuación local del histograma

En el caso de una modificación global del histograma, no siempre se produce un aceptable contraste de la imagen; contraste en pequeñas regiones pueden producir efectos no deseados. Por lo tanto, existe en la bibliografía trabajos que presentan modelos basados en modificaciones locales del histograma, adaptados a la distribución local del histograma. En el artículo de Caselles et al., 1999, [1], se presenta un modelo de modificación local del histograma basado en el mapa topográfico de la imagen, o representación de la imagen a partir de sus conjuntos de nivel. A partir de la definición de cambio de contraste local, prueban la existencia de un representante óptimo, que minimiza un cierto funcional que por una parte, maximiza el contraste de la imagen y por otra preserva los valores de la imagen alrededor de su valor medio.

2.4. Un algoritmo de corrección del color

El Local Color Correction (LCC) es un algoritmo que básicamente adapta localmente la función gamma de corrección del color. Esta función se aplica para mejorar el contraste en zonas donde el color se ha saturado al negro o al blanco, y básicamente consiste en un cambio o modificación de

los valores por una función convexa, en el caso del negro, y cóncava en el caso del color blanco.

En este artículo [6], la función gamma se adapta localmente a los valores de los píxeles y se escoge de tal manera que se hace de manera automática, sin dependencia de parámetros.

2.5. Un nuevo modelo dado por una EDP

En un reciente trabajo de Morel, Petro y Sbert, en proceso de publicación pero que su algoritmo es público on line en IPOL (Image Processing On Line) [5], se realiza el contraste de una imagen trabajando en el dominio del gradiente. La idea es dado un campo vectorial \mathbf{V} encontrar la imagen u tal que su vector gradiente esté lo más próximo posible, en norma L^2 , al vector \mathbf{V} . En este caso u debe minimizar el siguiente funcional:

$$\int_{\Omega} |\nabla u - \mathbf{V}|^2 dx,$$

donde Ω es el dominio de la imagen. La solución de este problema de minimización debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange asociada

$$\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \text{sobre } \Omega,$$

con condiciones de Neumann homogéneas en la frontera,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

donde \mathbf{n} es el vector normal exterior a la frontera.

Aumentar el contraste de una imagen se puede conseguir aumentando el gradiente de la imagen en zonas oscuras, y una vez modificado el gradiente, resolver la correspondiente ecuación de Poisson para obtener una imagen mejor contrastada. El algoritmo propuesto consiste en:

- Calcular las zonas oscuras de la imagen mediante un umbral T aplicado a la imagen de nivel de gris (por ejemplo, $T = 50$).
- Definir el campo vectorial \mathbf{V} , amplificando el gradiente de la imagen en las zonas oscuras.

$$\mathbf{V} = \begin{cases} \nabla f & \text{en las zonas claras,} \\ \alpha \nabla f & \text{en las zonas oscuras.} \end{cases}$$

donde $\alpha \in [2, 3]$ es el factor de amplificación.

- Resolvemos la ecuación de Poisson con condiciones de Neumann homogéneas.

Notemos que el problema de Neumann para la ecuación de Poisson tiene solución única excepto constantes, pero este hecho no tiene importancia en este caso ya que al final tenemos que trasladar y escalar el resultado para que se pueda visualizar en una pantalla, es decir, en el intervalo $[0, 255]$.

3. Una solución complementaria: escaneo 3D

En esta sección se propone una solución complementaria dada por el escaneo de la bodega en condiciones adversas para la visualización de la imagen a que da lugar.

3.1. Escaneo 3D en el proyecto BAT

Inicialmente, se había descartado el empleo de escáneres 3D dentro del contexto del proyecto BAT. Esta decisión fue tomada a partir de los datos mostrados ante las pruebas del proyecto SDI: el escaneo 3D era demasiado lento como para obtener una representación digital del relieve en un tiempo mínimo.

En primer lugar, decir que la elección del escáner para el proyecto SDI se realizó hace cuatro años, tiempo durante el cual esta tecnología ha continuado desarrollándose. Por otra parte, el proyecto BAT exige otros requisitos diferentes:

1. No es crítica la resolución obtenida en la representación digital del relieve, ya que servirá como apoyo o asistencia al operario humano ante condiciones adversas de visibilidad, y no como única referencia en la toma de decisiones para un sistema autónomo.
2. Una alta velocidad de escaneo sigue siendo un requisito fundamental. Aunque cabe decir que el tiempo límite de procesamiento es relativamente elevado: desde que la cuchara recoge material hasta que se realiza la descarga (entre 5 y 6 segundos), con lo no se trata de un sistema crítico en tiempo real.

A partir de estas premisas, se propone un sistema alternativo/complementario basado en el escaneo 3D.

1. Sistema previo de “disparo” del escaneo, mediante medición en los niveles de gris de la imagen a color real (saber cuando el operario no está viendo correctamente el interior de la bodega, y emplear entonces el escaneo 3D).
2. El evento principal que produce cambios en el perfil y relieve del interior del buque es la caída de la cuchara y recogida de material. El escaneo se puede hacer en los instantes posteriores a este evento. Además, esto nos indica una zona central de cambios en el relieve (alrededores

de donde ha caído la cuchara), lo que nos permitiría centrar el escaneo sólo en esa zona.

Por lo tanto, no se descarta su uso en este caso como medida asistencial al operario humano en condiciones adversas de visibilidad.

4. Experimentación

A nivel de experimentación, se han seleccionado tres imágenes para aplicarles los distintos procedimientos, dos de ellas aportadas por la misma empresa EBHI y una tercera imagen que es una fotografía realizada por nuestro grupo con malas condiciones de iluminación.

- La primera imagen es una fotografía sacada con una cámara reflex para gran público, en la misma sala de trabajo de la Universidad de Santiago, de un jarro de flores al lado de la ventana, realizado sin flash. Los resultados de esta imagen se identificarán con la clave *lirios*.
- La segunda imagen es una imagen de la bodega, aportada por EBHI y captada a las 0:33 pm. Como se ha comentado en la sección de la descripción de las imágenes, una fuerte sombra se proyecta sobre la zona de la bodega, lo que hace que a nivel de un primer análisis de la imagen haya una fuerte saturación al color negro, con muy poca información a nivel de color. Los resultados de esta imagen se identificarán con la clave *bodegam*.
- La tercera imagen es también una imagen de la bodega del barco, aportada por EBHI y captada a las 8:21 am. Como se puede ver, la imagen está poco contrastada, pero aún así se identifica el material de la bodega. Los resultados de esta imagen se identificarán con la clave *bodegab*.

En el proceso de experimentación, se ha optado por hacer un tratamiento centrado en la zona de la bodega manteniendo el contorno del buque. Una vez procesada la imagen de la bodega, se recomendaría acoplarla, por un procedimiento sencillo, a su ubicación en la imagen global del buque. Por lo tanto, de aquí en adelante nos referiremos a la imagen dada por la imagen que comprende solamente la zona de la bodega.

5. Conclusiones

Presentamos las conclusiones después de haber realizado un estudio sobre la muestra de las dos imágenes aportadas por la empresa. Al estar localizado el problema principal en la falta de visualización de la zona de la bodega, solamente cuando se dan unas condiciones climatológicas particulares, se ha

estudiado también una alternativa diferente al procesamiento de la imagen. La solución propuesta se basa en el escaneo 3D de la zona de la bodega, explicada en una sección anterior.

Por lo tanto, a partir del trabajo de estas jornadas y después de analizar y procesar las dos imágenes aportadas por la empresa, redactamos un conjunto de conclusiones que pueden aportar una solución pensando en el trabajo futuro del problema planteado. Éstas son:

- (i) Las técnicas o algoritmos presentados en el realce de imágenes mejoran la visualización de la imagen, como se puede ver en el conjunto de experimentos presentados.
- (ii) El tratamiento de la imagen se puede realizar sobre la zona de interés (bodega), que es realmente donde existe el problema del contraste.
- (iii) Es fundamental tener una buena calidad de las imágenes que se proyectan en las pantallas de la sala de mando.
- (iv) Por esta razón, hay una necesidad de tener unas cámaras de alta resolución para la captación de las imágenes, en un formato mínimamente comprimido que no degrade la calidad de la imagen.
- (v) Es importante tener una buena pantalla, a nivel de resolución, brillo, ..., para una óptima visualización de las imágenes de las cámaras.
- (vi) La técnica del escaneo 3D se presenta como un *complemento o alternativa* al modelo de procesamiento de imágenes. Esta técnica se podría activar, tipo ayuda, en el caso en que las condiciones meteorológicas fueran tan negativas que no se visualizara la información de la imagen en el interior de la bodega. Esta opción estaría ligada a una pequeña pantalla en la que se visualizaría el relieve 3D del material de la bodega.
- (vii) La implementación en tiempo real (procesamiento de las imágenes + Escaneo 3D) es factible.
- (viii) Finalmente y ligado a un trabajo futuro del problema, se podría hacer un estudio de las imágenes con unos algoritmos más adaptados al contraste real de la imagen de la bodega y con unos resultados finales esperados más óptimos.



Figura 1: De izquierda a derecha y de arriba abajo. 1) Imagen original *lirios* de una fotografía hecha sin flash en la misma aula del grupo de trabajo de las jornadas, 2) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de transformación afín dado por $h(u_1) = u_1 + 2(u_1 - m)$ donde m es el mínimo de u_1 , 3) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de transformación afín en dos trozos, 4) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo anterior después de un pre-filtrado de la imagen original a partir de la TV, 5) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo de Poisson, con $\alpha = 3$ y un parámetro sobre el gradiente de 50, 6) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo del Local Color Correction.

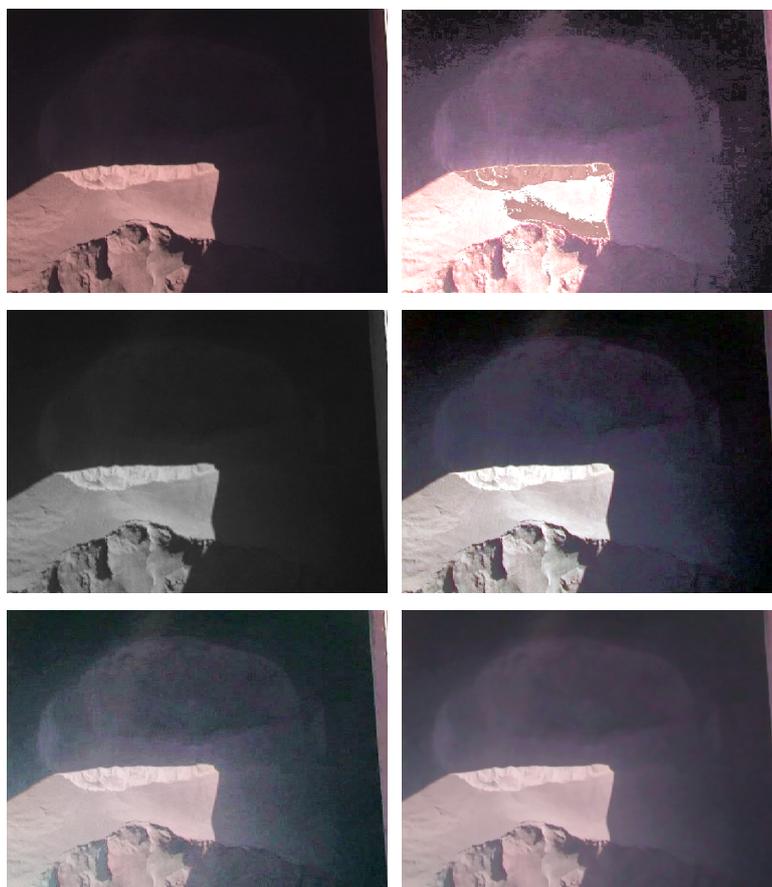


Figura 2: De izquierda a derecha y de arriba abajo. 1) Imagen original *bodegam* de la bodega del barco, 2) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de ecualización global, 3) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de ecualización local, 4) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de transformación afín en dos trozos, 5) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo de Poisson, con $\alpha = 3$ y un parámetro sobre el gradiente de 50, 6) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo de Poisson, con $\alpha = 3$ y un parámetro sobre el gradiente de 50 después de un pre-filtrado de la imagen original a partir de la TV.

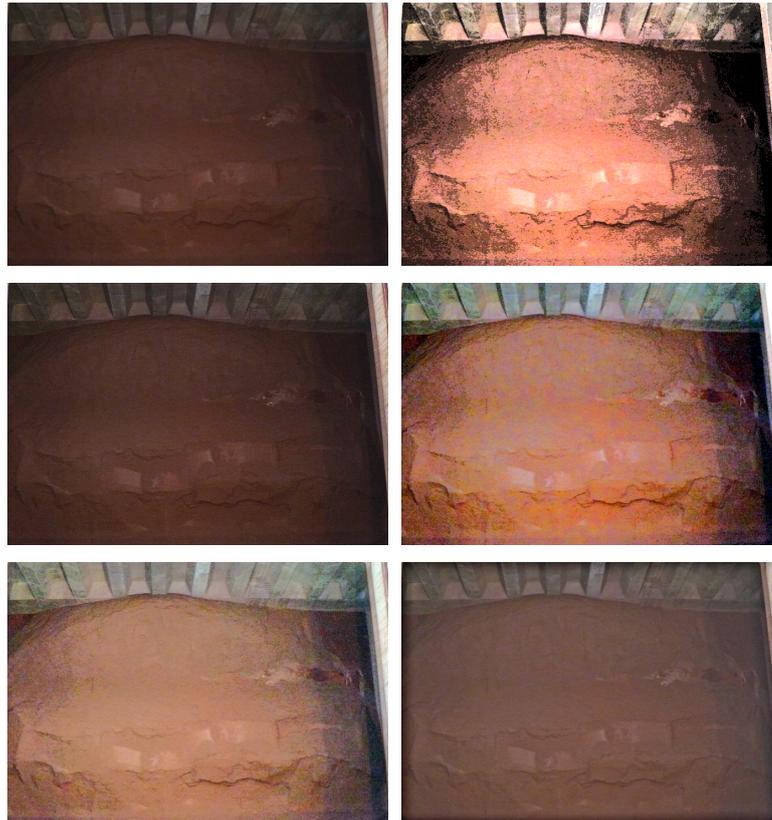


Figura 3: De izquierda a derecha y de arriba abajo. 1) Imagen original *bodega* de la bodega del barco, 2) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de ecualización global, 3) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de transformación afín dado por $h(u_1) = u_1 + 2(u_1 - m)$ donde m es el valor mediano de u_1 , 4) Imagen resultante después de haberle aplicado un algoritmo de transformación afín en dos trozos, 5) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo de Poisson, con $\alpha = 3$ y un parámetro sobre el gradiente de 70, 6) Imagen resultante después de haberle aplicado el algoritmo del Local Color Correction.

Referencias

- [1] V. Caselles, J.L. Lisani, J.M. Morel and G. Sapiro, Shape Preserving Local Histogram Modification, *IEEE Trans. on Image Processing* **vol. 8**, **no. 2** (1999) 220–230.
- [2] G. Sapiro and V. Caselles, Histogram modification via differential equations, *J. Differential Equat.* **vol. 135** (1997) 238–268.
- [3] R. C. Gonzalez and P. Wintz. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley (1987).
- [4] N. Limare, J.M. Morel, A.B. Petro, C. Sbert, Variations around Retinex and contrast correction, *IPOl (Image Processing On Line)*, <http://www.ipol.im> (2010)
- [5] N. Limare, J.M. Morel, A.B. Petro, C. Sbert, Simplest Color Balance, *IPOl (Image Processing On Line)*, <http://www.ipol.im> (2010)
- [6] N. Moroney, Local Color Correction using Non-Linear masking, *Proc. IS&T/SID Eight Color Imaging Conference* (2000) 108–111.
- [7] A. Rizzi, C. Gatta, D. Marini, A new algorithm for unsupervised global and local color correction, *Pattern Recognition Letters* **vol. 24** (2003) 1663–1677.

Diseño de una muestra entre varios extractos de población en el sector cosmético profesional y propuesta de ponderación de las respuestas

Coordinador Académico Manuel Febrero Bande
Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela

Representante de la Empresa Joaquín Sandoval Pérez
Empresa Germaine de Capuccini

Grupo de trabajo Pedro Faraldo Roca (USC), José Luis Ferrín González (USC), María José Ginzo Villamayor (USC), Elena Vázquez Cendón (USC)



Diseño de una muestra entre varios extractos de población en el sector cosmético profesional y propuesta de ponderación de las respuestas

*Manuel Febrero Bande** *Joaquín Sandoval Pérez***

Resumen

En este documento se recoge el estudio llevado a cabo para la empresa Germaine de Capuccini durante las III jornadas de consulta matemática para empresas e instituciones celebradas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago del 8 al 10 de Noviembre de 2010.

Palabras clave: Encuestas; Muestra Informativa; Cosmética.

1. Introducción

La empresa Germaine de Capuccini (GdC de ahora en adelante) es una empresa líder del sector cosmético internacional que, desde su fundación en 1964, se ha distinguido por la constante preocupación por mejorar la calidad de sus productos y por la formación de expertos altamente cualificados en cosmética profesional. Fruto de esta preocupación por la mejora continua, todos los productos de la empresa son sometidos a rigurosos tests y a exhaustivos controles que garanticen su seguridad y que cumplan con las especificaciones publicitadas. La empresa, que está radicada en Alicante, empezó su expansión internacional en el año 1983 estando presente ahora en los cinco continentes y en más de 80 países, bien a través de empresas profesionales de la cosmética, bien a través de centros profesionales propios o bien mediante la comercialización directa de sus productos.

2. Planteamiento del problema por parte de la empresa

Por lo comentado en la sección anterior, GdC atiende a un universo variado de clientes que pueden necesitar desde una crema facial hidratante

*E-mail: manuel.febrero@usc.es

**E-mail: joaquin.sandoval@germaine-de-capuccini.com

hasta elaborados tratamientos y masajes en un centro SPA, conformando una cartera variopinta que también puede tener distinta percepción acerca de la calidad de los productos. Precisamente, esta heterogeneidad en la percepción de los productos es un tema importante desde el punto de vista comercial dado que la empresa querría conocer de antemano la aceptación de sus productos en el mercado en base a encuestas y estudios previos al lanzamiento. En particular, el modelo ideal deseado por la empresa se expresaría de la siguiente forma:

$$A = p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 + p_4 A_4. \quad (1)$$

donde A representaría la aceptación general del producto y A_i la aceptación (u otra variable) en una subpoblación caracterizada por algún atributo relevante como, por ejemplo, su perfil profesional o público, la asiduidad con la que se somete a tratamientos cosméticos o el conocimiento del sector cosmético en su conjunto.

3. Planteamiento académico del problema

Desde el punto de vista estadístico, el modelo mostrado en (1) es claramente un modelo de regresión cuyo objetivo es explicar la variable respuesta A mediante una combinación lineal ponderada de los resultados obtenidos en cada uno de los grupos. Aparte del modelo de regresión, un planteamiento similar se puede encontrar en muestreo donde el problema es calcular una variable global de la población, ponderando la información obtenida en subpoblaciones para obtener alguna ventaja estadística en el estimador global (normalmente una reducción de la incertidumbre). Por tanto, la resolución del problema queda condicionada a disponer de datos que se adecúen al fin que se busca. Sin embargo, es aquí donde surgen las dificultades y que pasaremos a enumerar:

1. La primera y más importante dificultad está en definir qué es la aceptación de un producto o, dicho en términos estadísticos, cuál es la variable respuesta A . Desde el punto de vista comercial, el éxito de un producto (su aceptación en el mercado) tiene que ver con muchos factores, pero básicamente, desde el punto de vista empresarial esto se reflejaría como un alto volumen de demanda. Entre los factores que pueden contribuir a esta aceptación, podríamos señalar los siguientes: la intrínseca calidad del producto, la imagen de la marca, la relación calidad/precio, la disponibilidad de productos similares por parte de la competencia o la inversión en publicidad. Cabe destacar que alguno de estos factores son variables objetivas y por tanto fácilmente medibles, mientras que otros están basados en percepciones subjetivas que suelen tener una alta incertidumbre asociada porque están basadas en encuestas de opinión.

2. La segunda dificultad viene de qué variables podemos considerar en la parte derecha de (1) y, sobre todo, si vamos a tener una distinción clara entre las encuestas que proceden de cada grupo. Si no sabemos bien que entendemos por aceptación en la población global, difícil será que tengamos esa definición en una subpoblación. Sin embargo, el modelo puede incluir otra información que sea accesible y que sustituya a la originalmente prevista.
3. Las encuestas disponibles están diseñadas, fundamentalmente, para determinar características organolépticas de los productos y para asegurar la total compatibilidad de los productos con la población objetivo más que para aportar información sobre las variables del modelo. Además, las encuestas se adaptan específicamente a cada producto, no permitiendo una comparación homogénea entre ellos.
4. El número de datos disponible es pequeño ya que se seleccionan productos similares entre ellos. Cada producto es un dato y el censo total de productos no es muy elevado.

Analizando las opciones disponibles en cuanto a datos y a encuestas, se consideran dos opciones como variable respuesta: las ventas en el primer año de lanzamiento de un producto y la última pregunta de los formularios que, con pequeñas variaciones, suele ser si continuará el cliente usando ese tratamiento en el futuro. A esta segunda variable la llamaremos “Satisfacción” o, abreviadamente, S . Como variables explicativas, se decide incluir también las valoraciones sobre las propiedades organolépticas preguntadas en la encuesta del producto. Estas valoraciones, que se hacen a casi todos los productos, incluyen preguntas sobre la absorción (Ab), la textura (Tex) y el perfume (Perf). La primera se valora en una escala de cinco categorías mientras que las dos restantes en una escala de 4. Con esta información, se calcula una valoración general de estas propiedades asignando puntos de 1 a 5 en el primer caso y de 1 a 4 en el segundo y tercer caso, empezando siempre por la categoría más desfavorable. Así, una puntuación más alta en esas variables indicará mayor valoración en esa categoría. Los datos para una serie de productos/tratamientos con los que se cuenta cierta información se muestran en la tabla 1.

Cuadro 1: Tabla con los datos analizados

Producto	Perfil	Ventas	Unidades	Satisf.	Abs.	Tex.	Perf.
N	Prof	4.373	3.573	100			3.40
ETO2	Prof	5.913	4.261	100	3.62	3.43	3.53
TEL	Prof	6.013	4.301	96.2			3.50
FM	Prof	5.091	3.531	96.2			
HNM	Pub	4.822	3.721	60.0	3.40	2.80	3.06
HNS	Pub	4.805	3.708	90.0	3.67	3.43	3.33
HMS	Pub	4.873	3.707	100	3.86	3.33	3.10
N	Pub	5.226	4.532	78.6	3.24	3.39	3.23
TR	Pub	5.903	4.680	100	3.69	3.50	3.24
ETO2	Pub	6.146	4.933	86.7	3.75	3.50	3.37
TEL	Pub	6.196	4.960	86.5	3.91	3.50	3.36

donde en aquellos tratamientos complejos donde se miden las propiedades organolépticas de cada uno de los pasos intermedios se ha calculado el promedio. Con estos datos se ha hecho un análisis exploratorio para encontrar posibles dependencias. Un gráfico de pares de estas variables puede verse en la figura (3). Si en esta figura, nos fijamos en la primera fila de dibujos, se aprecia una cierta relación entre las valoraciones de Absorción, Textura y Perfume con la Satisfacción. No así con Venta donde mirando los gráficos en las posiciones (1,2) y (2,1) parece haber una falta de relación total. El resto de los gráficos de la fila segunda muestran una cierta tendencia creciente que debe considerarse poco fiable debido a la falta de datos. Las correlaciones lineales pueden verse en la tabla (2). De esta tabla, destacan la baja correlación de la variable Venta con casi todas salvo quizás la variable Textura. En general, las valoraciones organolépticas presentan aceptables correlaciones también con Satisfacción. En los productos de perfil profesional sólo disponemos de un registro completo aunque sí se observa mayor grado de Satisfacción con esos productos.

Con estos datos plantearemos modelos de regresión donde las variables respuestas son o bien las Ventas (V) o bien la Satisfacción (S) y como variables explicativas incorporaremos las valoraciones organolépticas (Ab , Tex , $Perf$).

Cuadro 2: Correlaciones lineales entre las variables

	Satisf	Venta	Abs	Text	Perf
Satisf	1.00	0.13	0.60	0.77	0.53
Venta	0.13	1.00	0.40	0.61	0.47
Abs	0.60	0.40	1.00	0.48	0.25
Text	0.77	0.61	0.48	1.00	0.66
Perf	0.53	0.47	0.25	0.66	1.00

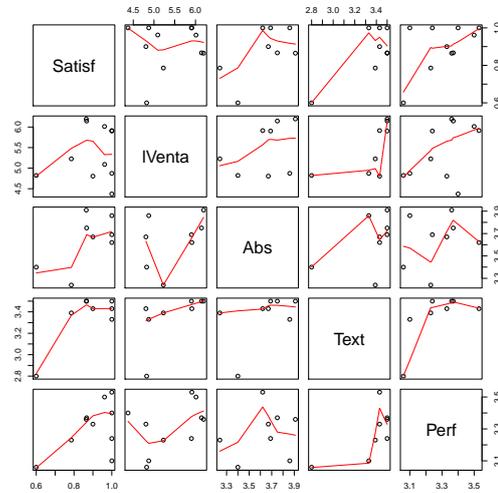


Figura 1: Diagramas de dispersión con estimación no paramétrica

1. Modelo 1: $V = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 Ab + \beta_3 Tex + \beta_4 Perf$. Este modelo lineal resulta ser no informativo con un $r^2 = 0,031$ y apareciendo todas las variables como no significativas. Aplicando una regresión stepwise que nos permite ir seleccionando que variables son las más informativas, de este modelo se caen, por orden, Ab, S y Tex, quedándonos finalmente con la variable Perf que no llega a ser significativa y con un $r^2 = 0,1215$ (tanto por uno de variabilidad explicada). Por tanto, éste resulta ser un modelo muy poco informativo. Esto quiere decir que las ventas no se explican por ninguna de las variables y particularmente por la Satisfacción. En este punto habría que plantearse si las ventas son una buena variable para reflejar el éxito o la aceptación de un producto o si habría que medir estas ventas en figuras relativas como porcentaje del mercado que un producto es capaz de acaparar o exceso de demanda sobre la prevista.

2. Modelo 2: $S = \beta_0 + \beta_1 Ab + \beta_2 Tex + \beta_3 Perf$. Con todas las variables el modelo explica el 41.49 % de la variabilidad de la respuesta pero con todas las variables no significativas. Como antes, aplicando una regresión stepwise eliminaremos en orden las variables Perf y Ab quedándonos como significativa ahora la variable Tex que resulta significativa y con $r^2 = 0,5262$ mejorando por tanto en 11 puntos el ajuste inicial. Sin embargo una mirada rápida al modelo ajustado (véase figura (1)) nos revela que el modelo es muy dependiente del dato que se sitúa más a la izquierda y que se opone a la masa de puntos que están colocados a la derecha. Este punto de la izquierda condiciona el análisis y los cálculos

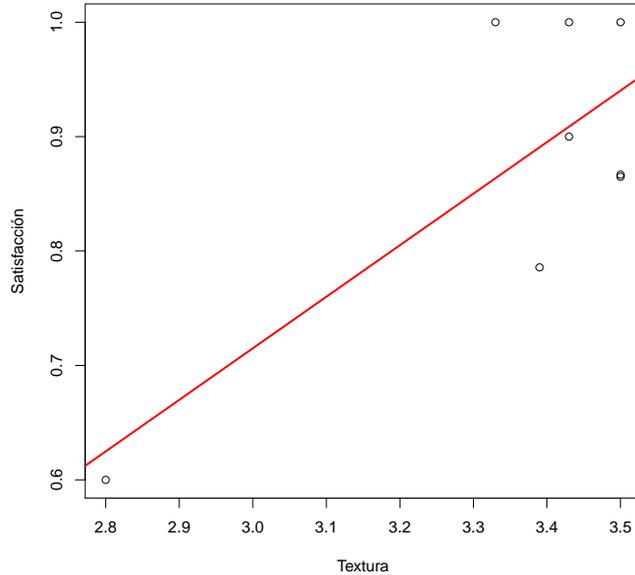


Figura 2: Modelo 2 de regresión

de la recta de regresión y por tanto habría que tomarse con precaución sus conclusiones. Esto es lo que se conoce como punto influyente. Si este punto no estuviese en la muestra, la recta sería otra bien distinta. Además este punto se antoja muy relevante ya que corresponde a uno de los pocos casos donde la variable S toma un valor bajo. Aquí tenemos otra fuente de sesgo. El conjunto de datos analizados corresponde a una serie de productos que ya están en el mercado y que, han pasado ya ciertos filtros en la empresa para llegar a ser comercializados. Entre estos filtros, seguro que están la calidad, la seguridad, la adecuación del producto a unas necesidades y las valoraciones previas a su puesta en marcha. Por eso, debe ser difícil encontrar datos con valores de la variable S bajos.

Una vez que los modelos de regresión lineal parecen no ser del todo satisfactorios, pueden plantearse relaciones un poco más complejas entre las variables como podría deducirse de la figura (3). Por ejemplo, considerar un modelo del estilo $S = \beta_0 + f_1(\text{Ab}) + f_2(\text{Tex}) + f_3(\text{Perf})$ donde a las f_i sólo se les impone la condición de que sean funciones suaves. Para poder estimar este modelo serían necesarios más datos dado que la mayor complejidad de las funciones implican disponer de más información para que éstas puedan ser estimadas.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha abordado un problema de difícil solución, no tanto por la complejidad matemática o estadística del problema sino por la dificultad para obtener información apropiada para el objetivo del estudio. La propia definición del objetivo es algo difusa y esto nos lleva a buscar alternativas con la información disponible. Sin embargo, está claro que la recogida de datos no está realizada con este objetivo sino con otro bien distinto. A modo de conclusión, se enumeran varias ideas para una posible revisión del estudio:

1. Es necesaria una definición precisa del objetivo. Una reflexión sobre el proceso de decisión sobre lo que es un producto aceptado o exitoso debiera producirse. Por ejemplo, las ventas, por si solas pudieran no ser el mejor indicador pero la penetración en el mercado, o la superación de expectativas quizás si debieran considerarse así como por ejemplo covariables interesantes como la inversión en publicidad.
2. Debe hacerse una reorganización y replanteamiento de las encuestas existentes. Las actuales están diseñadas para un control organoléptico del producto y no para analizar la posible aceptación del producto en el mercado. Además se debe tener cuidado con el diseño muestral. Por ejemplo, para la mayoría de productos de la gama profesional el cliente es entrevistado justo despues del tratamiento con lo que puede estar condicionado por el trato recibido (efecto placebo) más que por las excelencias del producto. La sensación placentera que puede proporcionar el entorno profesional puede condicionar la percepción subjetiva del sujeto. En el caso de los productos no aplicados por profesionales, efectos a tener en cuenta serían la duración del tratamiento y la posible complejidad de este aplicado en casa. Para reducir la subjetividad, sería deseable realizar preguntas que sitúen el producto comparativamente con otros del mercado en la percepción del usuario. Además esto no serviría para clasificar al propio usuario.
3. Modelos más complejos que los de regresión lineal pueden ser establecidos entre las variables si el número de datos disponible aumenta de manera significativa.

Simulación numérica de tejidos biológicos

Coordinadora Académica Patricia Barral Rodiño
Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela

Representante de la Empresa Nora Fernández Pérez
Empresa Tecnologías Avanzadas Inspiralia S.L. (ITAV)

Especialista Miguel A. Fernández Varela
Empresa INRIA, CRI Paris-Rocquencourt

Grupo de trabajo Lino José Álvarez Vázquez (UVigo), Alfredo Bermúdez de Castro López Varela (USC), José Durany Castrillo (UVigo), María González Taboada (UDC), M. Cristina Naya Riveiro (UDC), M. Teresa Sánchez Rúa (CESGA), Virginia Selgas Buznego (UDC), Carlos Vázquez Cendón (UDC), Juan M. Viaño Rey (USC)



Simulación numérica de tejidos biológicos

Patricia Barral Rodiño* Nora Fernández Pérez**

Resumen

En este documento se recoge el problema presentado por la empresa ITAV, relativo a la simulación numérica del comportamiento mecánico de una válvula cardiaca. Durante las jornadas se trabajó en la búsqueda de una ley hiperelástica anisótropa adecuada para modelar el comportamiento del material, así como en la resolución numérica del problema mecánico con el paquete comercial ANSYS.

Palabras clave: hiperelasticidad; anisotropía; modelos de lámina.

Clasificación por materia AMS: 74B20, 65M60, 68N30

1. Descripción del problema

Una válvula aórtica está formada por tres membranas sujetas por un aro, conocido como *stent*, que abren y cierran para dejar fluir o bloquear el paso del flujo sanguíneo (ver Figura 1). En ocasiones, estas válvulas dejan de funcionar correctamente, siendo necesario implantar válvulas artificiales. La investigación en este tema pasa por mejorar el diseño de estas válvulas de modo que tengan un comportamiento análogo a las naturales, con la mayor durabilidad posible. Con el objetivo de mejorar el diseño de estas válvulas la empresa realizó los siguientes ensayos de simulación:

- *Simulación numérica del comportamiento mecánico de una válvula aórtica mediante una ley de comportamiento plástica isotrópica.* Este ensayo se diseñó con el objetivo de validar los resultados presentados en la Ref. [6] utilizando el paquete comercial ANSYS. Para ello se consideró una ley plástica isotrópica, cuyos parámetros fueron calibrados a partir de un ensayo uniaxial utilizando una ley de Ramberg-Osgood. En cuanto a las condiciones de contorno, se impuso presión transvalvular con ciclo cardiaco de 0.9s, el *stent* se suponía empotrado y se consideró una condición de contacto con rozamiento entre las tres membranas. Para la resolución numérica se utilizó un modelo de lámina. Los resultados obtenidos en la simulación se compararon con los obtenidos en la Ref. [6] y la desviación fue del 6%.

*E-mail: patricia.barral@usc.es

**E-mail: nora.fernandez@pera.com



Figura 1: Válvula polimérica

- *Simulación numérica del comportamiento mecánico de una válvula aórtica mediante una ley de comportamiento elástica ortótropa.* A continuación se trató de modelar el comportamiento anisótropo de la válvula mediante una ley elástica lineal ortótropa en las direcciones radial y circunferencial. Siguiendo las Ref. [3, 9], según las cuales las fibras se desarrollan en las direcciones en las que las tensiones son máximas en el caso isótropo lineal, se realizó en primer lugar la simulación numérica de este caso y las direcciones obtenidas de la simulación se introdujeron como dato en el caso ortótropo. Los resultados obtenidos no fueron satisfactorios, mostrando la necesidad de realizar la simulación del caso no lineal ortótropo.

A la vista de estos ensayos y siguiendo la bibliografía los objetivos planteados por la empresa al grupo de trabajo son:

- Identificar una ley de comportamiento hiperelástica anisótropa adecuada para modelar el comportamiento mecánico de la válvula.
- Analizar la compatibilidad del comportamiento anisótropo con un modelo de lámina.
- Posibilidad de simular el comportamiento de materiales hiperelásticos anisótropos con ANSYS, paquete de simulación empleado habitualmente por la empresa.

2. Objetivo 1: ley de comportamiento hiperelástica anisótropa

El gran desarrollo de la elasticidad no lineal en los últimos años se debe al interés de la industria del automóvil y la ingeniería civil en el caucho y otros polímeros, así como a su aplicación en la modelización mecánica de la piel, las arterias, el corazón o las válvulas aórticas. En esta sección recogemos un pequeño resumen sobre leyes de comportamiento hiperelásticas.

Sea $\mathbf{S} = \det(\mathbf{F})\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}$, el primer tensor de tensiones de Piola Kirchoff, donde \mathbf{F} denota el gradiente de la deformación y \mathbf{T} el tensor de Cauchy. Un material elástico se denomina *hiperelástico* si \mathbf{S} es la derivada de una función escalar, es decir, si existe W tal que

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (1)$$

siendo \mathbf{F} el tensor gradiente de deformación. La función W se denomina *densidad de energía por unidad de volumen* en la configuración de referencia. Teniendo en cuenta que el tensor de Cauchy-Green por la derecha se define como $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ se puede expresar W en función de \mathbf{C} , de modo que se tiene la siguiente relación:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (2)$$

2.1. Caso isótropo

Consideremos un cuerpo *isótropo*, entonces la densidad de energía es función de los invariantes principales del tensor de Cauchy-Green por la derecha: $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$, $I_2 = [\text{tr}(\mathbf{C}^2) - (\text{tr}(\mathbf{C}))^2]/2$, $I_3 = \det(\mathbf{C}) = J^2$ (ver Ref. [4]).

Entre las leyes de hiperelasticidad isótropa más utilizadas destacamos:

- **Materiales de Mooney-Rivlin**

$$W = c(J - 1)^2 - d \log J + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3),$$

donde c , c_1 , c_2 y $d = 2(c_1 + c_2)$ son parámetros del material.

- **Materiales de neo-Hooke**

$$W = \frac{\lambda}{2} \log^2 J + \mu \left(\frac{I_1}{2} - \frac{3}{2} - \log J \right),$$

donde λ y μ son los coeficientes de Lamé del material.

2.2. Caso no isótropo

Isotropía transversal Consideremos un material con una dirección preferente, representada por el vector unitario \mathbf{a}_0 . Por ejemplo, las capas de paredes arteriales están formadas por láminas con una única dirección preferente de fibras de colágeno, por lo que pueden ser consideradas transversalmente isótropas. En este caso, siguiendo las Ref. [10, 11], la función de densidad de energía depende de \mathbf{C} y \mathbf{a}_0 ; si se definen los pseudo-invariantes de anisotropía

$$I_4 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}_0, \quad I_5 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}_0,$$

se tiene que $W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$. Si se descompone W en la energía debida al cambio de volumen a través de J y en la energía debida a la deformación isocórica, que se representa a través de los pseudo-invariantes \bar{I}_a del tensor isocórico $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$, se puede descomponer W en la forma

$$W = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\bar{I}_a).$$

Las funciones de densidad de energía para materiales transversalmente isótropos más habituales son:

- **Materiales de Weiss o Mooney-Rivlin generalizado**

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + c_1(\bar{I}_1 - 3) + c_2(\bar{I}_2 - 3) + c_4(\exp(\bar{I}_4 - 1) - \bar{I}_4),$$

donde K es el módulo volumétrico y c_1 , c_2 y c_4 son parámetros del material.

- **Materiales de Almeida o Cohen generalizado**

$$W = a_0 \exp(\phi - n \log I_3)$$

con $\phi = a_1(I_1 - 3) + a_2(I_2 - 3) + a_3(I_1 - 3)^2 + a_4(I_4 - 1) + a_5(I_4 - 1)^2 + a_6(I_1 - 3)(I_4 - 1) + a_7(I_5 - 1)$, donde n y a_i , $i = 0, \dots, 7$ son parámetros del material.

Anisotropía con dos familias de fibras Si un material presenta dos direcciones preferentes, como es el caso de una válvula aórtica, dadas por los vectores unitarios \mathbf{a}_0 , \mathbf{b}_0 la función de densidad de energía es de la forma $W = W(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$. Por analogía con el caso anterior se definen los pseudo-invariantes de anisotropía

$$I_6 = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0, \quad I_7 = \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{b}_0, \quad I_8 = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0) \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}_0, \quad I_9 = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0)^2,$$

de modo que $W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9)$.

Uno de los modelos anisótropos más utilizados en la bibliografía sobre el tema es el propuesto por Holzapfel y Gasser (Ref. [8]) y empleado en las

Ref. [5, 10] para modelizar el comportamiento mecánico de paredes arteriales:

$$W = \frac{K}{2} \log^2 J + \frac{c}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{a=4,6} (\exp(k_2(\bar{I}_a - 1)^2) - 1), \quad (3)$$

donde c , k_1 y k_2 son parámetros del material.

3. Objetivo 2: Compatibilidad de los modelos de láminas con una ley hiperelástica anisótropa

De manera general, las simulaciones numéricas de láminas utilizan una de las formulaciones siguientes (ver Ref. [2]):

- Método de elementos finitos aplicado a un modelo clásico de lámina;
- Elementos de lámina generales;
- Elementos de lámina 3D.

Los modelos clásicos de lámina requieren la definición de una transformación o carta (2D-3D) que permite parametrizar la superficie media de la lámina. Estos modelos se derivan generalmente a partir de la formulación débil de la elasticidad lineal tri-dimensional a la que se le aplica:

- la hipótesis cinemática de Reissner-Mindlin: los puntos materiales de una línea perpendicular a la superficie media permanecen alineados durante la deformación;
- la hipótesis de tensiones planas: tensión normal nula, $\sigma_{33} = 0$.

Las formulaciones basadas en elementos de lámina generales (“General Shell Elements”) no se obtienen discretizando directamente un modelo clásico de lámina. Estas formulaciones se derivan, al contrario, a partir de una formulación débil de elasticidad (lineal o no-lineal) tri-dimensional, a la que se le aplica previamente la hipótesis de tensiones planas. Obsérvese que (en el caso no-lineal) esta hipótesis proporciona una ecuación (no-lineal) suplementaria que permite expresar la deformación normal en función de las deformaciones planas. El dominio definido por la lámina se discretiza mediante un mallado definido por nodos posicionados en la superficie media y la relación siguiente, entre coordenadas locales en cada elemento $(r, s, z) \in [-1, 1]^3$ y posición dentro del elemento,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i(r, s) \left(\mathbf{x}^i + z \frac{\epsilon_i}{2} \mathbf{a}_3^i \right). \quad (4)$$

Las funciones λ_i son las funciones de forma del elemento finito de Lagrange 2D asociado a los N nodos \mathbf{x}^i , y \mathbf{a}_3^i y ϵ_i denotan, respectivamente, el vector normal unitario y el espesor de la lámina en los nodos. La formulación discreta final se obtiene mediante una discretización isopáramétrica de la formulación tri-dimensional, es decir, en la que las funciones de forma son del tipo

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^N \lambda_i(r, s) \left(\mathbf{v}_h^i + z \frac{\epsilon_i}{2} \boldsymbol{\theta}^i \right), \quad (5)$$

donde $\boldsymbol{\theta}^i$ representa la variación del vector normal \mathbf{a}_3^i . Se puede demostrar que los desplazamientos (5) verifican la hipótesis de Reissner-Mindlin.

Puesto que el único modelo de elasticidad utilizado es 3D, este tipo de formulaciones es compatible con el uso de leyes de comportamiento generales como las leyes hiperelásticas introducidas en la sección precedente. Además, desde el punto de vista de la descripción geométrica de la lámina, solamente se necesitan las coordenadas de los nodos \mathbf{x}^i y de los vectores normales \mathbf{a}_3^i , mucho más práctico que proporcionar una transformación geométrica.

Los elementos generales de lámina se pueden extender al caso de hipótesis cinemáticas de orden superior (con respecto al desplazamiento a través del espesor). En esta línea, los elementos de lámina 3D parten de una formulación 3D sin la hipótesis de tensiones planas. El mallado es similar al definido por (4). La hipótesis cinemática es cuadrática con respecto a la coordenada transversal en los nodos, es decir, las funciones de forma son del tipo:

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^N \lambda_i(r, s) \left(\mathbf{v}_h^i + z \frac{\epsilon_i}{2} \boldsymbol{\theta}^i + z^2 \frac{\epsilon_i^2}{4} \boldsymbol{\zeta}^i \right),$$

Este tipo de formulaciones presentan solamente un interés en casos de deformaciones extremas, en los que la hipótesis de tensiones planas es crítica, que no es el caso de las válvulas cardiacas, donde las deformaciones son principalmente de tipo flexión. Sin embargo, puesto que las dos últimas formulaciones existen en ANSYS, ambas pueden ser utilizadas para comparar los resultados y justificar la elección.

4. Objetivo 3: Resolución numérica de un problema hiperelástico anisótropo con ANSYS

Como se puede consultar en Ref. [1], ANSYS tiene incorporadas leyes hiperelásticas isotrópicas (Mooney-Rivlin, neo-Hooke, ...) y, para el caso ani-

sótropo, está implementada la siguiente ley general:

$$W = \frac{1}{d}(J-1)^2 + \sum_{i=1}^3 a_i(\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^3 b_j(\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{k=2}^6 c_k(\bar{I}_4 - 1)^k + \sum_{l=2}^6 d_l(\bar{I}_5 - 1)^l + \sum_{m=2}^6 e_m(\bar{I}_6 - 1)^m + \sum_{n=2}^6 f_n(\bar{I}_7 - 1)^n + \sum_{o=2}^6 g_o(\bar{I}_8 - \bar{I}_9)^o, \quad (6)$$

donde a_i , b_j , c_k , d_l , e_m , f_n , g_o son parámetros del material.

5. Conclusiones

Como conclusión, el grupo de trabajo hace dos propuestas a la empresa para realizar la simulación del comportamiento mecánico de la válvula:

Propuesta 1: Utilizar la ley (3) para modelar el comportamiento hipere-lástico anisótropo combinada con un modelo de lámina general.

Ventajas:

- La utilización de esta ley para la modelización del comportamiento mecánico de válvulas aórticas es habitual en la bibliografía sobre el tema.
- Depende sólo de 4 parámetros del material.
- En la bibliografía se pueden encontrar ensayos experimentales y valores de los parámetros del material.

Inconvenientes:

- No está incorporada en ANSYS y por lo tanto habría que programarla

Propuesta 2: Utilizar la ley (6) para modelar el comportamiento hipere-lástico anisótropo combinada con un modelo de lámina general.

Ventajas:

- Está ya programada en ANSYS.

Inconvenientes:

- Depende de muchos más parámetros, por lo que se propone considerar una simplificación con menos parámetros.
- Es necesario realizar ensayos y ajustes para obtener los parámetros del material.

Cabe destacar que el problema planteado por la empresa es muy complejo, ya que, además de la dificultad de modelar el comportamiento del material de la válvula, tema tratado en las jornadas, sería necesario estudiar la condición de contacto entre las membranas y considerar el problema de interacción fluido-estructura entre el fluido sanguíneo y la válvula.

Referencias

- [1] Theory reference for the mechanical APDL and the mechanical applications. ANSYS Release 12.1 November 2009.
- [2] D. Chapelle, K.J. Bathe. *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Springer. 2011.
- [3] Niels J.B. Driessen, Anita Mol, Carlijn V.C. Bouten and Frank P.T. Baaijens, Modeling the mechanics of tissue-engineered human heart valve leaflets, *Journal of Biomechanics* **40** (2007) 325–334.
- [4] Y.B. Fu and R.W. Ogden. *Nonlinear Elasticity. Theory and Applications*. Cambridge University Press. 2001.
- [5] C. García Herrera. *Comportamiento mecánico de la aorta ascendente: caracterización experimental y simulación numérica*. Tesis Doctoral. ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 2008.
- [6] Rami Haj-Alia, Lakshmi P. Dasib, Hee-Sun Kima, Joonho Choia, H.W. Leoa and Ajit P. Yoganathanb, Structural simulations of prosthetic tri-leaflet aortic heart valves, *Journal of Biomechanics* **41** (2008) 1510–1519.
- [7] Holzapfel, *Structural and Numerical Models for the (Visco)elastic Response of Arterial Walls with Residual Stresses*. Biomechanics of Soft Tissue in Cardiovascular Systems. CISM Courses and Lectures No. 411. Springer 2003.
- [8] G.A. Holzapfel and T.C. Gasser. A viscoelastic model for fiber reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2000) 4379–4403.
- [9] Michael S. Sacks, W. David Merryman and David Schmidt, On the biomechanics of heart valve function, *Journal of Biomechanics* **42** (2009) 1804–1824.
- [10] J. Rodríguez Soler. *Modelos numéricos para mecánica cardiovascular de las paredes arteriales y sus procesos de adaptación*. Tesis Doctoral. ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid 2003.
- [11] A. J. M. Spencer. *Continuum theory of the mechanics of fibre reinforced composites*. CISM 282. (1984) 1–32.

Agradecimientos

El Comité Organizador desea agradecer todas las inestimables contribuciones de los ponentes de las empresas, los coordinadores académicos de las propuestas, así como de los participantes en los distintos grupos de trabajo, que han contribuido al éxito científico de este evento.

También desea expresar su gratitud a las diversas instituciones que han colaborado económicamente en su financiación: el Ministerio de Educación y Ciencia a través del Proyecto Ingenio Mathematica i-MATH del programa Consolider-Ingenio 2010; la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia a través de la Red Mathematica Consulting y Computing de Galicia y la Facultad de Matemáticas de la USC que cedió los locales para el desarrollo de las jornadas.

Por último, desea expresar su agradecimiento a la Gestora de Valorización Tecnológica del Proyecto i-MATH (Ana Belén Fernández Gómez) y a los técnicos de Computing y Consulting del Nodo CESGA (María Teresa Sánchez Rúa y Guadalupe Parente Morales) que con su minucioso trabajo y dedicación han permitido el éxito organizativo de las Jornadas y que han contribuido directamente en la edición de este libro.



S U M A R I O

Descarga Remota de Graneles (BAT Project)	9
Diseño de una muestra entre varios extractos de población en el sector cosmético profesional y propuesta de ponderación de las respuestas	23
Simulación numérica de tejidos biológicos	33



UniversidadeVigo

