



CONSULTA MATEMÁTICA Para Empresas e instituciones i-Math 2008-2011









Editores: Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela, José Durany Castrillo, Ignacio García Jurado, Peregrina Quintela Estévez, Juan Solà-Morales Rubió

25, 26 y 27 de Marzo 2009 Facultad de Matemáticas. Campus Sur, Santiago de Compostela





II JORNADAS DE CONSULTA MATEMÁTICA PARA EMPRESAS E INSTITUCIONES

Santiago de Compostela, 25-27 de Marzo de 2009











Alfredo Bermúdez de Castro

Peregrina Quintela Estévez Universidade de Santiago de Compostela alfredo.bermudez@usc.es; peregrina.quintela@usc.es

Jose Durany Castrillo

Universidade de Vigo durany@dma.uvigo.es

Ignacio García Jurado

Universidade de A Coruña igjurado@udc.es

Joan Solà-Morales Rubió

Universidad Politécnica de Cataluña JC.Sola-Morales@upc.edu

Imprime:

ISBN:

Santiago de Compostela 978-84-692-8277-9

Índice

Introducción

Resolución numérica de topologías de bloques con realimentaciones anidadas

. Francisco Javier Fernández Fernández, Indizen Technologies S.L. Francisco José Pena Brage, Universidade de Santiago de Compostela

Comportamiento dinámico de tanques de gas licuado, con énfasis en la interacción fluido (gas natural licuado) - estructura (tanque cilíndrico metálico) 22

. Francisco José Calvo Plazo, SENER Duarte Santamarina Ríos, Universidade de Santiago de Compostela

Some mathematical problems that dominate the risk assessment and protection engineering of nuclear power plants. 32

. José María Izquierdo Rocha, Consejo de Seguridad Nuclear Alfredo Bermúdez de Castro López-Varela, Universidade de Santiago de Compostela Ricardo Cao Abad, Universidade de A Coruña

Agradecimientos

 $\mathbf{45}$

9

Introducción

Los días 25, 26 y 27 de Marzo de 2009, el Nodo CESGA del proyecto Consolider i-MATH, organizó en Santiago de Compostela la segunda edición de las Jornadas de Consulta Matemática para Empresas e Instituciones. i-MATH 2008-2011.

El objetivo de estas Jornadas es generar un espacio anual de encuentro entre empresas e instituciones y grupos de investigación del proyecto i-MATH de manera que se

- promocione la Matemática en el entorno empresarial buscando activamente proyectos de investigación y desarrollo en donde la Matemática tenga una especial relevancia;
- intensifique la I+D entre los grupos de investigación del proyecto MATHEMATICA y los correspondientes a las industrias, en problemas susceptibles de ser tratados con métodos matemáticos, estadísticos o computacionales;
- actualice el mapa de demanda tecnológica.

En esta segunda edición de las Jornadas (véase el enlace correspondiente en la página http://mathematica.nodo.cesga.es/) han participado como ponentes las empresas Indizen Technologies S.L., SENER Ingeniería y Sistemas S.A. y el Consejo de Seguridad Nuclear, pertenecientes a los sectores de Consultoría, Ingeniería Civil y Energía, respectivamente. Cada uno de los ponentes empresariales presentó un problema susceptible de ser tratado mediante métodos matemáticos y/o estadísticos; en particular, las técnicas matemáticas utilizadas en su análisis fueron la Modelización, la Optimización con Restricciones, la Programación Matemática y la Simulación Numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Los problemas estudiados en estas Jornadas cubrieron campos diversos: Interacción Fluido-Estructura, Diseño de Nuevos Algoritmos, Investigación Operativa y Estadística. En las Jornadas han participado un total de 26 personas entre estudiantes, investigadores, profesores y técnicos de empresas que han contribuido a un mayor éxito de las mismas. Este libro presenta, para cada uno de los tres problemas industriales propuestos, una memoria resumen acerca de su planteamiento, su enfoque matemático y su resolución - si ésta ha podido ser completada o una propuesta para la misma.

Finalmente, cabe subrayar que en esta segunda edición de las Jornadas se cumplieron los objetivos planteados por los organizadores: dar respuesta a las necesidades planteadas desde Industrias y Empresas utilizando herramientas matemáticas y/o estadísticas y promocionar así su uso en la industria, incrementar y fortalecer las relaciones entre las empresas y los grupos de investigación participantes, y abrir nuevas líneas de investigación hacia temas de interés para Empresas y Universidades. Todo ello hizo que la valoración general del evento por parte de los organizadores, los coordinadores académicos de los problemas, los ponentes de las empresas y los asistentes fuese sin duda globalmente positiva.

Santiago de Compostela, 22 de Diciembre de 2009

El Comité Organizador:

- Alfredo Bermúdez de Castro López Varela. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.
- Jose Durany Castrillo. Departamento de Matemática Aplicada II, Universidade de Vigo.
- Ignacio García Jurado. Departamento de Matemáticas, Universidad de A Coruña.
- Peregrina Quintela Estévez. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela.
- Joan Solà-Morales Rubió. Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad Politécnica de Cataluña.

Resolución numérica de topologías de bloques con realimentaciones anidadas

Coordinador Académico Francisco José Pena Brage Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela

Representante de la Empresa Francisco Javier Fernández Fernández **Empresa** INDIZEN TECHNOLOGIES S.L.

Grupo de trabajo Ramón Doallo (UDC) Francisco Javier Fernández Fernández (INDIZEN TECHNOLOGIES S.L.) Basilio Fraguela (UDC) Dolores Gómez (USC) Jerónimo Rodríguez (USC) Laura Saavedra (USC) María Teresa Sánchez (CESGA)



Resolución numérica de topologías de bloques con realimentaciones anidadas

Francisco José Pena Brage^{*}

Francisco Javier Fernández Fernández**

Resumen

Se trata de diseñar un algoritmo robusto que nos permita resolver un sistema físico complejo compuesto de una serie de bloques que pueden estar acoplados entre sí. El contexto en el que se presenta el problema es la validación de la consistencia de las hipótesis sobre las que se basan los licenciamientos de las centrales nucleares espaolas de diseo LWR (Light Water Reactor) tipo PWR (Pressurized Water Reactor).

Se ha formalizado matemáticamente la estructura de bloques y relaciones entre ellos y se ha escrito un funcional derivado del modelo, cuya minimización equivale a la resolución del sistema completo. Se ha abstraído la información necesaria a fin de plantear una estrategia de búsqueda de mínimo en la que no intervengan derivadas del funcional a minimizar.

Palabras clave: Optimización; Direct Search Methods; Sistemas acoplados.

Clasificación por materia AMS: 90C06; 90C56

1. Introducción

Cuando se aborda la simulación de un sistema físico complejo, aparecen acoplamientos y dependencias entre las distintas partes del mismo. Es necesario tenerlas en cuenta si se pretende un planteamiento realista del problema. Estos acoplamientos suelen ser de naturaleza dispar y pueden presentar varios niveles de complejidad, lo que supone una dificultad adicional. Con frecuencia, los códigos de los que se dispone permiten la resolución de cada uno de los bloques de modo independiente, pero no el sistema completo.

Consideremos que el sistema esta compuesto por un conjunto de cajas negras o bloques con diferentes entradas y salidas de datos que están relacionadas entre ellas. La salida de una caja es la entrada de otra u otras cajas.

 $^{^{*}\}textsc{E-mail: fran.pena@usc.es}$

^{**}E-mail: fjavier.fernandez@indizen.com

En la figura 1 se representa un diagrama tipo. En ella aparecen representados cuatro bloques junto con las distintas interacciones existentes entre ellos. Así, el bloque 1 depende del 4 y éste depende de los bloques 2 y 3, los cuales, a su vez, están interrelacionados.



Figura 1: Diagrama de bloques anidados tipo

El objetivo de esta sesión de trabajo es obtener un algoritmo robusto que, teniendo en cuenta las relaciones entre las distintas cajas, permita obtener la solución del conjunto. Para ello, se ha formalizado matemáticamente la estructura de cajas y relaciones entre ellas y se ha escrito un funcional derivado del modelo, cuya minimización equivale a la resolución del sistema completo. Se ha abstraído la información necesaria a fin de plantear una estrategia de búsqueda de mínimo en la que no intervengan derivadas del funcional a minimizar. Ademas, en la definición de este funcional aparecerían implícitas las relaciones entre las distintas cajas.

2. Descripción del problema por parte de la empresa

Gran parte de las centrales nucleares espaolas están basadas en diseos LWR (Light Water Reactor) tipo PWR (Pressurized Water Reactor). Con el fin de testear la validez y la consistencia de las hipótesis sobre las que se basan los licenciamientos para esta clase de centrales nucleares, el CSN (Consejo de Seguridad Nuclear) en colaboración con Indizen Technologies, ha desarrollado un sistema de códigos de simulación para un análisis integrado de seguridad en centrales nucleares llamado SCAIS (System of Codes for Integrated Safety Assessment).

La codificación en SCAIS de los elementos que componen una central nuclear viene dada en forma de topología, cuya resolución numérica se lleva a cabo con modelos propios del CSN. Esta topología, por diseo, está formada por una serie de bloques que pueden estar acoplados entre sí. Este acoplamiento se traduce en una complicación adicional a la hora de resolver numéricamente un determinado sistema. Este es el caso del sistema de refrigeración primario, cuya estructura simplificada se puede apreciar en la Figura 2.



Figura 2: Estructura simplificada del sistema de refrigeración primario

Básicamente, el agua llega al núcleo por las ramas frías (en azul) y regresa a los generadores de vapor (encargados de transformar la energía térmica generada en el núcleo a energía cinética que mueve las turbinas) por las ramas calientes (en rojo). Cada uno de los elementos que se pueden ver en la figura anterior (núcleo, generadores de vapor y presionador) se corresponden con la composición de una serie de bloques (ver Figuras 3, 4 y 5).

2.1. Objetivos demandados por la empresa

Hasta ahora, la resolución numérica de esta clase de problemas se realiza mediante algoritmos de punto fijo que, normalmente, son ineficientes desde el punto de vista de tiempos de cálculo además de presentar problemas de convergencia en los casos de interés (son muy sensibles al orden de resolución de los bloques). El objetivo es el estudio de algoritmos alternativos, con el fin de incorporar al código SCAIS un algoritmo robusto que nos permita resolver esta clase de problemas. Para ello se ha de tener en cuenta que la resolución numérica de cada uno de los bloques se debe considerar como una caja negra, por lo tanto, no tendremos control sobre la función que los resuelve. Otro de los aspectos que se han de tener en cuenta es la sensibilidad de los resultados dependiendo del bloque de partida, es por ello que se deben emplear algoritmos que resuelvan el problema de forma conjunta evitando la resolución de cada uno de los bloques de realimentación por separado.



Figura 3: Núcleo.



Figura 4: Generador de vapor, lazo 1.



Figura 5: Generador de vapor, lazos 2 y 3.

2.2. Descripción de los métodos matemáticos, estadísticos y/o computacionales que previsiblemente estarán involucrados

Para la resolución numérica las topologías de bloques anidados posiblemente sea necesario utilizar algoritmos que no usen derivadas (Nonlinear Simplex Method) o, en el caso en el que no se obtengan buenos resultados con esta clase de métodos, intentar emplear técnicas de Derivación Automática para obtener las derivadas.

3. Formalización del problema

Partimos un conjunto de N variables, no necesariamente de la misma naturaleza, y que denotaremos por $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$. Consideremos un sistema de M bloques, a cada uno de los cuales asociamos un operador $A_j, j = 1, \ldots, M$. El operador A_j recibe un conjunto de variables de entrada $\mathbf{x}_{p_j}, p_j \subset \{1, \ldots, N\}$ y devuelve un conjunto de variables de salida $\mathbf{x}_{q_j}, q_j \subset \{1, \ldots, N\}$.

Llamaremos solución a un conjunto (x_1, \ldots, x_N) de valores de las varia-

bles de partida que verifique el sistema siguiente:

$$A_{1}(\mathbf{x}_{p_{1}}) = \mathbf{x}_{q_{1}}, \quad p_{1} \subset \{1, \dots, N\},$$

$$A_{2}(\mathbf{x}_{p_{2}}) = \mathbf{x}_{q_{2}}, \quad p_{2} \subset \{1, \dots, N\},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_{M}(\mathbf{x}_{p_{M}}) = \mathbf{x}_{q_{M}}, \quad p_{M} \subset \{1, \dots, N\}.$$
(1)

Encontrar la solución de este sistema es equivalente a hallar el mínimo del funcional f definido por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M} \left\| A_j(\mathbf{x}_{p_j}) - \mathbf{x}_{q_j} \right\|_j, \qquad (2)$$

donde $\|\cdot\|_j$ denota la norma asociada al operador A_j . Nótese que este funcional no es más que la suma de las normas de los residuos e incluye las interacciones entre los distintos bloques.

A modo de ejemplo, se considera el sistema de bloques de la Figura 1 junto con las interacciones y variables de entrada y salida que se recogen en la Tabla 1, donde M = 4 y N = 10. Observese que no necesariamente toda la salida de un operador constituya la entrada total de otro. Así, de la salida q_2 del operador A_2 sólo se considera el índice 5 como entrada para el operador A_4 .

	Entrada	Salida
A_1	$p_1 = \{8, 9, 10\}$	$q_1 = \{1, 2, 3\}$
A_2	$p_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$	$q_2 = \{4, 5\}$
A_3	$p_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$q_3 = \{6,7\}$
A_4	$p_4 = \{5, 6, 7\}$	$q_4 = \{8, 9, 10\}$

Cuadro 1: Ejemplo de relaciones para los bloques de la Fig. 1

Teniendo en cuenta esta tabla, el sistema (1) se escribiría del modo si-

guiente

$$A_{1}(x_{8}, x_{9}, x_{10}) = (x_{1}, x_{2}, x_{3}),$$

$$A_{2}(x_{1}, x_{2}, x_{3}, x_{6}, x_{7}) = (x_{4}, x_{5}),$$

$$A_{3}(x_{1}, x_{2}, x_{3}, x_{4}, x_{5}) = (x_{6}, x_{7}),$$

$$A_{4}(x_{5}, x_{6}, x_{7}) = (x_{8}, x_{9}, x_{10}).$$
(3)

El funcional que proporciona este sistema vendrían dado por

$$f(\mathbf{x}) = \|A_1(x_8, x_9, x_{10}) - (x_1, x_2, x_3)\|_1 + \|A_2(x_1, x_2, x_3, x_6, x_7) - (x_4, x_5)\|_2 + \|A_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - (x_6, x_7)\|_3 + \|A_4(x_5, x_6, x_7) - (x_8, x_9, x_{10})\|_4.$$
(4)

Cada una de estas normas habría de definirse específicamente a fin de tener en cuenta la física del problema y los posibles acoplamientos entre las distintas partes del sistema.

4. Implementación de una solución

Nuestro objetivo en este apartado es describir los elementos básicos a considerar en el modelado del sistema complejo anterior. Para cada uno de estos elementos, describiremos su función y las partes que lo constituyen. Se espera que estos elementos puedan ser codificados como clases en un futura implementación del algoritmo de resolución.

Se han seleccionado tratando de que sean lo suficientemente abstractos como para que puedan utilizarse un amplio rango de métodos de optimización para la búsqueda de la solución del sistema (véase [1, 4]).

Las variables $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ del sistema representan todas las entradas y salidas de las cajas negras que lo forman. Un conjunto de valores constantes $\mathbf{x}^0 = \{x_1^0, \ldots, x_N^0\}$, adecuados para ellas, permite evaluar en un momento dado cada caja del sistema. Llamaremos "variable" a cada uno de estos estos conjuntos de valores constantes, \mathbf{x}^0 .

Cada caja negra consiste, básicamente, en un código de cálculo que tiene unas variables de entrada y de salida. En síntesis, podemos ver ese código como un operador que actúa sobre un subconjunto de \mathbf{x} y devuelve otro subconjunto de \mathbf{x} . El conjunto de índices que identifican las componentes de las variables de entrada y salida de un operador es una información relevante. Por tanto, un "bloque" se compone de:

- un operador,
- una variable de entrada,
- los índices de las componentes de la variable entrada,
- una variable de salida y
- los índices de las componentes de la variable de salida.

Una vez definidos los bloques, es necesario definir el funcional, que es el que contiene la información de todo el conjunto. Un "funcional" será una colección de bloques. Al recorrer la colección, se pueden ir construyendo los sumandos del funcional descritos en el modelo del problema. La norma de cada sumando podría ser distinta, con objeto de *normalizar* las aportaciones de cada operador. Por tanto, un "funcional" se compone de:

- una colección de bloques y, posiblemente,
- una colección de normas asociadas.

Estos son los objetos fundamentales para codificar las cajas y sus relaciones. El paso final es la elección de un algoritmo que permita encontrar una solución del sistema, tal y como ha sido definida en la sección anterior. El algoritmo no puede involucrar el cálculo de derivadas del funcional. Tanto en el caso de algoritmos de búsqueda directa (Nelder-Mead, Powell,...) como en el caso de algoritmos genéticos, es necesario dar una serie de pasos similares:

- 1. Se precisa generar un número finito de "variables" iniciales.
- 2. El algoritmo llama al funcional para que evalúe la bondad de las variables generadas.
- Con esta información, el algoritmo selecciona un nuevo conjunto de variables.
- 4. El proceso se repite hasta que se cumple un criterio de convergencia.

En el caso del algoritmo de Nelder-Mead [3], se trabaja sobre un simplex. En el ejemplo de cuatro bloques descrito en la Figura 1, se necesitarían 11 variables (o puntos) en el espacio de dimensión 10 formando un simplex. En cada paso, el simplex se transforma (por simetrías, contracciones, ...) con objeto de determinar un punto donde al funcional alcanza su mínimo. En el caso de algoritmo genéticos (véase, por ejemplo, [2]), se generaría de manera aleatoria un población de P variables (o individuos, en la terminología usual de estos métodos). Una nueva generación de individuos se obtendría mediante cruce (y, posiblemente, mutación) de los anteriores. En el paso 2, el algoritmo seleccionaría los P miembros mejor adaptados (es decir, en los que el funcional obtiene menor valor) y éstos compondrían la siguiente generación de la población.

Hemos de destacar que, a diferencia de un algoritmo de punto fijo que recorriese la estructura de cajas negras de forma secuencial, el modelo matemático propuesto permite un cierto grado de paralelismo puesto que, dada una variable \mathbf{x}^0 , la evaluación de los sumandos del funcional pueden hacerse al mismo tiempo. Por otro lado, los algoritmos de optimización anteriormente descritos permiten una nueva capa de paralelización:

- 1. En la generación de las variables iniciales (y de iteraciones subsiguientes).
- 2. En la llamada al funcional sobre todas las variables consideradas.

Una futura línea de trabajo consistiría en evaluar experimentalmente distintos métodos de optimización que cayesen en el formalismo antes descrito. Otro aspecto a investigar sería cómo integrar sobre las particularidades físicas del sistema a resolver. Por ejemplo, si el bucle A_2-A_3 debe ser resuelto con mayor precisión que otras partes del problema, podría modificarse el funcional, usando una norma más exigente en los sumandos que se refieren a estos bloques. En caso de usar algoritmos genéticos, se podría establecer una modificación ad hoc que obligase a que las variables relativas a esos bloques tuviesen más peso en el proceso de generación de nuevos individuos.

5. Conclusiones

El trabajo desarrollado en las secciones anteriores se resume en las siguientes conclusiones:

- Se ha considerado un sistema compuesto de bloques de cálculo relacionados entre sí a través de variables de entrada y salida.
- Se ha escrito una formulación matemática del sistema y definido el concepto de solución para él.
- Se han propuesto una serie de elementos básicos que recogen la información relevante del modelo, susceptibles de ser utilizados en una futura programación de un algoritmo de resolución.

• Se han identificado posibles métodos de optimización, aplicables a estos elementos, aunque un estudio más cuidadoso de su viabilidad formaría parte de futuras líneas de investigación.

A. Adenda

En el turno de preguntas que siguió a la exposición del trabajo, surgieron dudas sobre la viabilidad del método propuesto cuando el tiempo de evaluación de los bloques es muy dispar. Algunos intervinientes indicaron la necesidad de ligar el método de optimización a cada bloque. A continuación, proponemos una variante del algoritmo que intenta solventar estas dudas. Consiste en agrupar los bloques de acuerdo al "grado de dificultad" para ser resueltos.

Supongamos que, en el ejemplo, A_1 y A_4 son de una dificultad parecida, y que A_2 y A_3 también comparten esta característica. Veamos cómo podríamos adaptar el método de optimización a estos grupos de bloques.

En primer lugar, se construyen dos funcionales, cada uno asociado a un grupo de bloques:

$$f_{14}(\mathbf{x}) = \|A_1(\mathbf{x}_{p_1}) - \mathbf{x}_{q_1}\|_1 + \|A_4(\mathbf{x}_{p_4}) - \mathbf{x}_{q_4}\|_4,$$
(5)

$$f_{23}(\mathbf{x}) = \|A_2(\mathbf{x}_{p_2}) - \mathbf{x}_{q_2}\|_2 + \|A_3(\mathbf{x}_{p_3}) - \mathbf{x}_{q_3}\|_3.$$
(6)

Ahora, se asocia un método de optimización a cada funcional. La selección estará basada en las propiedades tanto del método de optimización como de los bloques a resolver.

Por último, el proceso de optimización se modifica aadiendo un algoritmo de punto fijo para los grupos de bloques:

- Se genera una variable \mathbf{x}^0 .
- Se realiza un bucle recorriendo los grupos de bloques. Para cada grupo:
 - Se generan variables iniciales, basadas en las variables de salida de la iteración de punto fijo anterior.
 - Se aplica al método de optimización asociado al funcional del grupo.

Las ventajas de esta modificación son dos:

- Se asocia un método de optimización a cada bloque, lo que permite afinar mejor el proceso de optimización.
- Aunque el bucle para el punto fijo es secuencial, el trabajo en cada iteración mantiene las dos capas de paralelismo que presenta el método propuesto originalmente.

Referencias

- [1] Chvatal, V. Linear Programming, W. H. Freeman and Company, 1983.
- [2] Goldberg, D. E., Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning, Addison-Wesley, 1989.
- [3] Nelder, J.A. and Mead, R., A Simplex Method for Function Minimization, Computer J., Vol.7, pp 308-313, (1965).
- [4] Nocedal, J. and Wright, S.J. Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 1999.

Comportamiento dinámico de tanques de gas licuado, con énfasis en la interacción fluido (gas natural licuado) - estructura (tanque cilíndrico metálico)

Coordinador Académico Duarte Santamarina Ríos Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela

Representante de la Empresa Francisco José Calvo Plaza **Empresa** SENER INGENIERÍA Y SISTEMAS

Grupo de trabajo Pablo Álvarez (USC) Francisco José Calvo Plaza (SENER INGENIERÍA Y SISTEMAS) Iban Constenla (USC) David González (USC) María González (UDC) Peregrina Quintela (USC) Duarte Santamarina Ríos (USC)



Comportamiento dinámico de tanques de gas licuado, con énfasis en la interacción fluido (gas natural licuado) - estructura (tanque cilíndrico metálico)

Duarte Santamarina Ríos^{*} Francisco José Calvo Plazo^{**}

Resumen

Se estudia el problema planteado por la empresa SENER para encontrar modelos matemáticos del comportamiento de tanques con gas licuado y predecir el oleaje que se produciría en caso de sismo, así como los métodos numéricos necesarios para su resolución.

Palabras clave: Oleaje; Gas natural licuado; fluido-estructura.

Clasificación por materia AMS:

1. Introducción

Debido a los problemas de suministro energético actuales, en la última década ha habido en España un enorme incremento en la construcción de tanques de almacenamiento para gas natural licuado (GNL). El gas es importado por medio de buques metaneros en forma líquida y almacenado tanques para después regasificarlo y suministrarlo a través de la red de gas a los consumidores.

El coste total de un tanque se puede estimar en unos 100 millones de euros (incluyendo ingeniería de diseño y construcción), con lo que una mejora en el diseño puede propiciar un ahorro importante (tanto en dinero como en recursos). Al analizar la estructura de los tanque ha de tenerse en cuenta, aparte de las acciones estáticas típicas de ingeniería civil, también aspectos dinámicos, donde el sismo cobra especial importancia. Estudiar el problema del sismo sobre estas estructuras es el objetivo del problema que se plantea, ya que un análisis pormenorizado implicará una mejora en el diseño, ganando en seguridad, y podrá redundar en la reducción de costes.

Lo que se pretende buscar en estas jornadas son técnicas matemáticas que permitan abordar el problema de interacción fluido-estructura mediante

^{*}E-mail: duarte.santamarina@usc.es

^{**}E-mail: francisco.calvo@sener.es

un modelo con un número razonablemente pequeño de grados de libertad para poder ser resuelto de una forma rápida y eficiente.

2. Planteamiento del problema

Para su almacenamiento y mantenimiento en estado líquido, el gas natural, ha de mantenerse a una temperatura de -163° C. Los tanques pueden almacenar cantidades del orden de 150.000 m³ de GNL. En la figura 1 se puede observar la imagen externa de uno de ellos. La estructura consta de tres capas (de la más externa a la interna) una primera capa de hormigón, una de aislante y por último una capa, en contacto con el gas, que se corresponde con un tanque de acero al níquel (91% acero, 9% níquel) de espesor variable que es la estructura que se pretende modelar. La geometría del tanque metálico interno es cilíndrica de dimensiones del orden de 80 m. de diámetro por 50 m. de altura. El espesor del tanque varía con la altura, pasando de aproximadamente 33 mm. en la parte inferior a 18 en la superior.



Figura 1: Imagen de la estructura externa de hormigón de un tanque de GNL.

Los objetivos planteados por parte de la empresa son los siguientes:

- enumeración y descripción de métodos o técnicas matemáticas que podrían ser adecuadas para un correcto planteamiento del problema,
- identidicar qué hipótesis de trabajo son necesarias para poder formular un modelo simplificado del fenómeno,
- estudiar qué métodos numéricos se prodrían usar para resolver este problema,
- evaluar la cantidad de software que se precisaría desarrollar para crear una aplicación informática que resolviera el problema.

3. Modelización matemática

Nuestro problema modelo consistirá en un recinto lleno de un fluido incompresible con una frontera abierta, como se presenta en la figura 2 en un corte axisimético de la geometría.



Figura 2: Problema test a analizar.

siendo

- = $\Omega_{\rm F}$ y $\Omega_{\rm S}$ los dominios del fuido y el sólido, respectivamente,
- $\Gamma_{\rm O}$ la frontera libre donde se producirá el oleaje
- Γ_{I} la frontera de interfaz entre la estructura y el GNL
- $\bullet\ \Gamma_{_{\rm N}}$ frontera Neumann en la cual se pueden ejercer fuerzas sobre el sólido
- $\Gamma_{\rm D}$ frontera Dirichlet donde existe un desplazamiento prefijado en la estructura, por ej. los de un movimiento sísmico.

El modelo para la resolución del problema es el siguiente: El GNL se puede considerar por sus propiedades como un fluido incompresible (newtoniano) no viscoso¹, mientras que la estructura se comportará como un sólido elástico. Todo en régimen de pequeñas deformaciones.

Usamos la siguiente notación para las magnitudes físicas del fluido:

- **u**: el vector de desplazamientos,
- π : la presión,
- $\rho_{\rm F}$: la densidad del GNL (480kg/m³),

 $^{^1\}mathrm{La}$ viscosidad dinámica del GNL es 10 veces inferior a la del agua

y en el sólido:

- v: el vector de desplazamientos,
- ρ_s : la presión,
- λ_s y μ_s : los coeficientes de Lamé,
- $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$: el tensor de deformaciones definido por $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$ i, j = 1, 2, 3,
- $\theta(\mathbf{v})$: el tensor de tensiones, que se asume que está relacionado con el tensor de deformaciones por la Ley de Hooke generalizada:

$$\theta_{ij}(\mathbf{v}) = \lambda_{\rm S} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\mathbf{v}) \delta_{ij} + 2\mu_{\rm S} \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Para poder modelar correctamente el problema al tratarse de un tanque de dimensiones tan considables, será necesario tener en cuenta, debido a la fuerza de la gravedad, que el fluido está pretensionado con la presión hidrostática (π_0), verificando la ecuación

$$\nabla \pi_0 = -\rho_{\rm F} g \mathbf{i}_z, \text{ en } \Omega_{\rm F},$$

con g la fuerza de la gravedad e $\mathbf{i}_z = (0, 0, 1)$ el vector opuesto al dirigido hacia el centro de la tierra. Esta presión hidrostática, producirá también un estado pretensionado en la estructura solución de

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}_0(\mathbf{v}) &= \mathbf{0}, & \operatorname{en} \Omega_{\mathrm{s}}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{0}, & \operatorname{en} \Gamma_{\mathrm{b}}, \\ \boldsymbol{\theta}_0 \boldsymbol{\nu} &= -\pi_0 \boldsymbol{\nu}, & \operatorname{en} \Gamma_{\mathrm{I}}, \end{cases}$$

Las ecuaciones del problema acoplado se puede encontrar en Ref. [5], suponiendo un régimen de pequeñas deformaciones con respecto a este estado pretensionado. La utilización de las ecuaciones en la configuración pretensionada puede producir anisotropías en el sólido lo que dificulta la resolución numérica del problema. Es por esto por lo que se sugiere resolver el sistema fluido-estructura sin considerar estas tensiones residuales y sumar al resultado obtenido las tensiones calculadas en el problema hidrostático.

Suponiendo que las fuerzas y desplazamientos ejercidos sobre el problema acoplado son armónicas, las soluciones también lo serán. Las ecuaciones del problema de autovalores acoplado obtenido a través de un proceso de linealización vea Ref.[4], y son:

 $\textit{Encontrar}\;\omega\geq 0,\,\mathbf{u}:\Omega_{\rm F}\to\mathbb{R}^3,\,\mathbf{v}:\Omega_{\rm S}\to\mathbb{R}^3\;y\,\pi:\Omega_{\rm F}\to\mathbb{R},\,(\mathbf{u},\mathbf{v},\pi)\neq\mathbf{0},$ tal que:

$$\nabla \pi - \omega^2 \rho_{\rm F} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Omega_{\rm F}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \operatorname{en} \Omega_{\mathrm{F}}, \tag{2}$$

div
$$[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})] + \omega^2 \rho_{\rm S} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Omega_{\rm S}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{I}}, \tag{4}$$

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (3)$$
$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (4)$$
$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})\boldsymbol{\nu} + p\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (5)$$
$$\rho_{\mathrm{F}}g \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} - \pi = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{O}}, \qquad (6)$$
$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{N}}, \qquad (7)$$

$$\rho_{\rm F} g \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm O}, \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{N}, \qquad (7)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{D}}. \tag{8}$$

El acoplamiento entre el fluido y la estuctura es tomado en consideración por las ecuaciones (4) y (5). La primera significa que el fluido y el sólido están en contacto en la interfaz. La segunda relaciona las tensiones normales del sólido en la interfaz con la presión del fluido.

Introducimos una nueva variable, $\eta:=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}$ en $\Gamma_{\mathrm{O}},$ relativa al desplazamiento vertical en la frontera libre. Entonces (1), (2), (4) y (6) relativas al desplazamiento del fluido \mathbf{u} pueden ser elimindas para obtener, en substitución estas ecuaciones:

$$-\Delta \pi = 0, \qquad \text{en } \Omega_{\rm F}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \omega^2 \rho_{\rm F} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm I}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \omega^2 \rho_{\rm F} \eta, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm O}, \tag{11}$$

$$\pi = \rho_{\rm F} g \,\eta, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm O}. \tag{12}$$

con lo que quedaría un campo escalar (la presión) para calcular la respuesta del fluido.

Del mismo modo, se podrían obtener las ecuaciones del problema si se ejerce sobre el sólido una fuerza

Dada una excitación externa armónica $\mathbf{F}(x, y, z, t) = \mathbf{f}(x, y, z) \cos(\omega t)$,

 $encontrar \; \mathbf{v}:\Omega_{\mathrm{S}} \to \mathbb{R}^3, \; \pi:\Omega_{\mathrm{F}} \to \mathbb{R} \; y \; \eta:\Gamma_{\mathrm{O}} \to \mathbb{R}, \; tal \; que:$

$$-\Delta \pi = 0, \qquad \text{en } \Omega_{\rm F}, \tag{13}$$

div
$$[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})] + \omega^2 \rho_{\rm s} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Omega_{\rm s}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \omega^2 \rho_{\rm F} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm I}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})\boldsymbol{\nu} + p\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (16)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \omega^2 \rho_{\rm F} \eta, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm O}, \tag{17}$$

$$\pi = \rho_{\rm F} g \, \eta, \qquad {\rm en} \, \Gamma_{\rm O}. \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{f}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{N}}, \qquad (19)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{D}}. \tag{20}$$

Si la condición es un desplazamiento armónico (por ej. un sismo) prefijado en parte de la frontera $\Gamma_{\rm D}$ se genera el siguiente problema

Dado un desplazamiento armónico $\mathbf{V}_0(x, y, z, t) = \mathbf{v}_0(x, y, z) \cos(\omega t)$, encontrar $\mathbf{v}: \Omega_{\mathrm{S}} \to \mathbb{R}^3$, $\pi: \Omega_{\mathrm{F}} \to \mathbb{R}$ y $\eta: \Gamma_{\mathrm{O}} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$-\Delta \pi = 0, \qquad \text{en } \Omega_{\rm F}, \tag{21}$$

div
$$[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})] + \omega^2 \rho_{\rm s} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$
 en $\Omega_{\rm s},$ (22)

$$\frac{\partial \pi}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \omega^2 \rho_{\rm F} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm I}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v})\boldsymbol{\nu} + p\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \nu} = \omega^2 \rho_{\rm F} \eta, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm O},$$
 (25)

$$\pi = \rho_{\rm F} g \,\eta, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm O}. \tag{26}$$
$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{v}) \mathbf{n} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \Gamma_{\rm N}, \tag{27}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \qquad \text{en } \mathbf{1}_{N}, \qquad (27)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \qquad \text{en } \Gamma_{\mathrm{D}}. \tag{28}$$

La resolución numérica se puede realizar utilizando el método de los elementos finitos del mismo modo que se realizó en Ref. [1] para el problema de autovalores.

4. Conclusiones

En este documento se ha intentado dar respuestas a las cuestiones presentadas por la empresa de tal modo que se ha planteado una modelización matemática del problema lo más sencilla posible y resoluble numéricamente utilizando el MEF. Somos conscientes de que los modelos presentados no son completamente adecuados para este problema ya que la estructura sólida es muy delgada. Sería necesario utilizar modelos tipo viga para describir el comportamiento del sólido en el problema 2D axisimétricos así como en problemas 3D lo correcto sería la utilización de modelos de cáscaras.

En problemas de interacción fluido-estructura el grupo de investigación no posee exactamente los códigos propios necesarios para la correcta resolución de estos modelos (fluido incompresible acoplado a vigas o cáscaras). Los códigos existentes resuelven los casos de interacción entre un fluido acústico y una viga (modelo de Timoshenko) para el caso axisimétrico (vea Ref. [6]) y un fluido incompresible no viscoso con una placa (modelo Reissner-Mindlin) para la geometría completa 3D (vea Ref. [2]). En cualquier caso, la descripción de los códigos sería fácilmente realizable modificando programas propios y desarrollando software nuevo. Entendemos que sería un problema abordable y ajustado para un posible trabajo de fin de master si la empresa estuviese interesada en una resolución del mismo.

Referencias

- A. Bermúdez, R. Rodríguez and D. Santamarina, A finite element solution of an added mass formulation for coupled fluid-solid vibrations. *Numer. Math.* 87 (2000), no. 2, 201–227.
- [2] A. Bermúdez, R. Rodríguez and D. Santamarina, Finite element computation of sloshing modes in containers with elastic baffle plates. *In*ternat. J. Numer. Methods Engrg. 56 (2003), no. 3, 447–467.
- [3] M. E. Gurtin, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, New York (1981).
- [4] H. J.-P.Morand and R. Ohayon, *Fluid Structure Iteraction*, John Wiley & Sons, N.Y. (1995).
- [5] D. Santamarina, Análise dun Método de Elementos Finitos e Masa Engadida para un Problema de Hidroelasticidade, Tesis de Licenciatura Publicacións do Depto de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela n. 14 (1998).
- [6] S. Van Caloen de Basseghem, Active Vibration Control in a Fluid-Structure Coupled System, Memoria de grado de Civil Engineer in Applied Mathematics. Université Catholique de Louvain (2008).

Some mathematical problems that dominate the risk assessment and protection engineering of nuclear power plants. A short view of a new discipline.

Coordinador Académico Alfredo Bermúdez de Castro Universidad o Centro Universidade de Santiago de Compostela

Coordinador Académico Ricardo Cao Universidad o Centro Universidade de A Coruña

Representante de la Empresa José María Izquierdo **Empresa** Consejo de Seguridad Nuclear

Especialista invitado Pierre Labeau Empresa Service de Metrologie Universite Libre de Bruxelles

Grupo de trabajo Alfredo Bermúdez de Castro (USC) Ricardo Cao Abad (UDC) José María Izquierdo (Consejo de Seguridad Nuclear) Pierre Labeau (Universite Libre de Bruxelles) Giuseppe Viglialoro (CESGA)



Some mathematical problems that dominate the risk assessment and protection engineering of nuclear power plants. A short view of a new discipline.

Alfredo Bermúdez de Castro^{*} Ricardo Cao^{**} José María Izquierdo^{***} Pierre Labeau^{****}

Resumen

This report summarizes some of the mathematical problems that ought to be addressed in the optimization of Nuclear Power Plant protection systems and in the verification activities by regulatory bodies to ensure compliance with public risk acceptance regulations of the final design and its subsequent changes.

Palabras clave: Nuclear Energy

Clasificacion por materia AMS:

1. Introduction

The mathematical modeling and simulation department (MOSI) at CSN (Consejo de Seguridad Nuclear, Spain) is responsible for setting-up and maintaining a computer simulation infrastructure, as well as an associated methodology, to help performing independent checks of industry safety assessments, both deterministic and probabilistic, in support of licensing applications or their changes and revisions of the Spanish nuclear power plants.

The aim of this presentation is to give a short account of a couple of outstanding mathematical problems that underpin many of the required activities.

From those, the tasks related to modeling the dynamics of accidents as part of the review of the plant protections frame the type of problems and techniques for their solutions that may be worth to share with and consult the academy about. They also deserve more widespread attention because:

^{*}E-mail: alfredo.bermudez@usc.es

^{**}E-mail: rcao@udc.es

^{****}E-mail: jmir@csn.es

^{*****}E-mail: pelabeau@ulb.ac.be

- the techniques developed by the nuclear industry to ensure safety and to protect the public and the environment, have potential to be most useful in many other domains with equivalent protection problems; those associated with the damage that the operation of large and complex systems may generate, from industrial complexes to financial institutions.
- this extension requires integration into a new discipline of the different aspects involved, with the goal of optimizing the design and operation of adequate protections. It maybe properly called Protection Theory, in parallel with Control Theory that is similarly devoted to optimize the control systems that automate the operation of the facilities in order to optimize their benefits.

Although control and protection engineering are parallel in their goals, and similar in its dynamic systems background, risk assessment techniques are essential in protection but not necessarily so in control, clearly indicating that we are talking about a closely related, yet different discipline. It may be considered a special branch of the system reliability world as much as one of the control engineering world, where the fault and event tree techniques that are familiar to the reliability experts combine with the strong flavor of system and process dynamics that is familiar to the control experts.

2. Problem description

For the purposes of this short note, we understand by Protection Engineering the discipline, methods and technologies that deal with the design and optimization of protective measures, both manual and automatic, in (usually large) industrial facilities. The optimization is constrained by acceptance criteria derived from general public risk limit regulations, as described for instance by risk limit curves.

Optimization is needed in order to assure intervention if necessary and prevent it if unnecessary; a requirement derived from the often-aggressive nature of the safety measures. Decision for interventions ought to be automatic in the short term after an accident and concurrently, and interactively manual, soon after. Time scales may vary from seconds to days or even months and very complicated phenomena may appear as a result of the interaction between the plant and the automatic systems. It paves the way for scenarios that easily escape individual's mind capability to predict behavior and requires carefully planned emergency instructions.

We denote generically as facility protection the set of systems, system features, and safety oriented decision-making processes whose objective is to optimize plant response with respect to damage under any credible event. Regulations and regulatory bodies should ensure that the facility protection prevents undue public risk should those events occur. Note the enveloping character of the analysis, which makes Protection Engineering assessment so complex and singular. Assessing damage for a few particular events is of little regulatory interest. What counts is to prove that under no credible circumstance can damage indicators go over unacceptable limits. These limits are inherently probabilistic in nature, since they are functions of the frequency.

Computer modeling, understood as the process to make precise statements and translate ideas into computer language, provides a rigorous framework for simulation to explicitly represent the impact of both protective measures and decisions for their interventions during the time evolution of accident scenarios. The results of the simulation and the defense of its underlying safety case allow for a traceable procedure for compliance with damage exceedance frequency risk acceptance criteria. As a result, safety assessment may be viewed as a computer aided protection-engineering methodology based on simulation (see Ref. [1])

As of today, a substantial body of theory, in rapid evolution during the last decade, is providing a sound scientific basis as well as identifying improvement areas. In our department we have selected a particular approach based on the stimulus driven theory of probabilistic dynamics (SDTPD, Ref. [2]). Overall, the theory attacks the optimization of the protection of complex systems. The main figure of merit, extensively discussed throughout the nuclear and financial community, is the frequency of exceedance of a given damage. The SDTPD integrate damage due to accident scenarios with scenario frequency by formulating equations for the exceedance frequency.

Among many, we have selected two different aspects we are interested in, with specific mathematical problems where help from academy is welcome.

Problem 1 Analysis of damage scenarios.

Here, the key point is that damage indicators (generally algebraic functions of process variables) should be chosen and safety limits be associated to them. Accident trajectories that violate those limits define <u>unsafe states</u>, a concept that parallels but is very different to <u>unstable states</u> in control. Their description leads to *damage domains* as the set of all possible damage trajectories.

The challenge is how to identify them in an optimal approach.

As an initial step for further investigation, we have explored a specific approach by revisiting old and classical control techniques -based on one dimensional <u>s-domain linear transfer functions</u> to identify stable states- then extending them into piecewise linear systems, using finite (instead of classical) Laplace transforms and extending the transfer function approach into a <u>multi s-domain transmission functions</u> to identify unsafe states via new mathematical "chain" operators. New insights and new problems are already showing up, but the general subject deserves academy attention.

Problem 2 Analysis of scenario frequencies and computation of the damage exceedance frequency.

Here the key point is how to incorporate reliability engineering and its contribution to assess the frequency of each scenario, a perspective that makes much different the protection problem from the control problem. Indeed, risk regulatory limits are set on the exceedance damage frequency in such a mix that both frequency and damage are an intrinsic part of the formulation of the protection problem.

The stimulus driven theory of probabilistic dynamics, SDTPD, originally an application of the Chapman-Kolmogorov approach into continuous events on dynamic systems, seems to be equivalent to a piecewise discontinuous stochastic Markov process with transition rates strongly dependent on the dynamics, equivalence that allows a computer algorithm and a method that we call the TSD (theory of stimulated dynamics, Ref. [3]) risk assessment method. Again, to ensure this equivalence it will be helpful to have the academic opinion and knowledge. Additionally, the relationship between the present "implicitly dynamic" approach (classical probabilistic safety assessment, PSA) and the TSD method is of paramount interest.

If successful this proposal makes a practical transition from static to dynamic reliability that will improve the assessment and design of protection systems.

The two problems and their techniques are presented below as independent of any application field as possible, and an example will be taken and used as illustration. Because both problems are different aspects of a single one, we will describe first the overall mathematical treatment, then specifying the differences.

3. Mathematical modelling

3.1. Background and example

To illustrate, we consider a simple case, based on a benchmark exercise performed in the framework of the European SARNET program (Severe Accident Research Network, Refs. [4, 5]). It analyzes the risk of containment failure in a nuclear power plant due to over-pressurization caused by hydrogen combustion. A condition for it is that the gas mixture becomes flammable, condition that we take here as a problem in itself. From a process variables time evolution simulation stand-point it is equivalent to a deposit, initially with air/steam at atmospheric conditions, whose gases concentrations evolve as a result of H2 injections and of condensation due to a cold water injection through a spray system.

Actually, H2 is escaping into the containment as a result of an accident originally due to a reactor vessel blowdown induced by a medium size reactor coolant system (RCS) pipe breach. H2 is generated after poorly-cooled (coolant vaporization) core melting and subsequent reactor core materials oxidation. The RCS is enclosed by the Containment building and its cold water spray system may be actuated to alleviate the increase in pressure associated with the H2 gas injection, although condensation risks the gas mixture in the containment becoming flammable . But for purposes of illustration the deposit analogy is enough.

3.2. Mathematical description

As it is well known, the differential semi-Markov equations for the probability $\pi_j(t)$ of staying in state j at time t are

$$\frac{d}{dt}\pi_{j}(t) = -\pi_{j}(t)\sum_{k\neq j} p_{j\rightarrow k}(t) + \varphi_{j}(t),$$

$$\varphi_{j}(t) \equiv \sum_{k\neq j} p_{k\rightarrow j}(t)\pi_{k}(t),$$
(1)

where the transition rates p are allowed to be a function of time. A closed solution is:

$$\pi_{j}(t) = \sum_{k} \left[\exp \int_{\tau}^{t} ds A(s) \right]_{jk} \pi_{k}(\tau),$$

$$[A(s)]_{jk} \equiv \begin{cases} p_{j \to k}(s), & \text{if } k \neq j, \\ -\lambda_{j}(s) \equiv -\sum_{k \neq j} p_{j \to k}(s), & \text{if } k = j. \end{cases}$$
(2)

They may also be written as integral equations for the frequency of entering state j, (ingoing density) $\varphi_j(t)$, and the solution of the semi Markov system may be expressed as

$$\varphi_j(t) = \sum_{\overrightarrow{j}} \varphi_j^{\text{seq } \overrightarrow{j}}(t) \equiv \varphi_j^1(0) \sum_{\overrightarrow{j}} \int_{V_n \overrightarrow{j}(\tau_n < t)} d\overrightarrow{\tau}_n Q_j^{\text{seq } \overrightarrow{j}}(t/\overrightarrow{\tau}_n), \quad (3)$$

which is an aggregate of "path frequencies" built upon the products

$$Q_{j}^{\text{seq} \vec{j}}(t/\vec{\tau}_{n}) = q_{j,j_{n}}(t,\tau_{n}) q_{j_{n},j_{n-1}}(\tau_{n},\tau_{n-1}) \dots q_{j_{2},j_{1}}(\tau_{2},\tau_{1}), \qquad (4)$$

$$\tau_{1} < \dots < \tau_{n-1} < \tau_{n} < t; \quad \vec{\tau}_{n} = (\tau_{1},\dots,\tau_{n}),$$

$$q_{j,k}(t,\tau) = p_{k \to j}(t) e^{-\int_{\tau}^{t} \sum_{l \neq k} p_{k \to l}(s) ds}.$$
(5)

States	State descrip-	Events	Event description
	tion		
1:0-0-0	Containment isolated in steady state at normal atmospheric pres- sure conditions. Air/steam inside. No hydrogen H2	Dynamic Event 1 Transition $1 \rightarrow 2$	Initiating event: H2 injection into containment air/steam mixture -result of a cold leg Reactor Coolant System break with core degradation.
2:1-0-0	Containment connected to breached RCS	Dynamic Event 2 Transition $2 \rightarrow 3$	H2 injection rate increase, re- sult of core oxidation increase after random initiation of pri- mary safety injection system (SIS).
3:1-1-0	Same as state 1 but safety injec- tion system is functioning	Dynamic Event 3 Transition $3 \rightarrow 4$	Spray cold water injection, result of random (or pres- sure stimulated) initiation of the Containment Heating Re- moval System (CHRS).
4:1-1-1	Same as state 2 but spray system is functioning Water concentra- tion not zero	Stimuli Activating Event 1	Gas mixture becomes flammable (damage stim- ulus)

Cuadro 1: States and some events considered in the illustration example

 $Q_j^{\text{seq}\ \vec{j}}(t/\overrightarrow{\tau}_n)$ is called the path Q-kernel. Thus the frequency becomes an aggregate of transient path contributions, each being a product of factors that carry the influence of each sequence event. $V_{n,\vec{j}}\ (\overrightarrow{\tau}_n < t)$ is the volume, in the multi-dimension time phase space, of event occurrence time combinations. Note that each combination corresponds to a deterministic trajectory, heretofore called "a transient path" or simply a "path".

3.3. Extension to dynamic reliability

In TPD, (Theory of Probabilistic Dynamics, Ref. [2]) the transition rates p are also allowed to be functions of process variables (temperatures, pressures, etc) that evolve with time along a dynamic trajectory. Usually the events come together with a change in the trajectory (a change in dynamics or dynamic events). For every path, we now have a deterministic transient that may be simulated with deterministic codes, providing then functions q via

$$q_{j,j_n}^{\text{seq}\overrightarrow{j}}(t,\tau) = p_{j_n \to j}\left(t, \overrightarrow{x}\left(t, \overrightarrow{j}\right)\right) e^{-\int_{\tau}^{t} \sum_{l \neq j_n} p_{j_n \to l}\left(s, \overrightarrow{x}\left(s, \overrightarrow{j}\right)\right) ds}.$$
 (6)

3.4. Extension to SDTPD

It is obvious that the path and sequence approach loses interest when the number of sequences is unmanageable. The requirement that, for events to occur, an associated stimulus should first be activated is key to the use of SDTPD instead of TPD. Indeed, the stimuli activation conditions imply restrictions such that the number of sequences is strongly reduced. The restrictions are the same as those attempted in classical probabilistic safety assessment (PSA) rules, they are in fact at the root basis of using the very concept of sequences.

It has been shown in Refs. [2, 3] that an equivalent expression to eqs. (3) and (4) may also be found in the SDTPD theory. The expression involves both, the pdf.s of stimuli activations and those of the subsequent delays prior to the events, and is then used in what we call "the TSD method". In TSD, (theory of stimulated dynamics) special stimuli are defined, including for instance stimulus "damage" that, when activated, corresponds to reaching unsafe conditions. Then, the damage exceedance frequency is given by

$$\varphi_{j}^{\text{damage}}\left(t\right) = \sum_{\overrightarrow{j},J_{N}} \varphi_{j_{1}}^{J_{1}}\left(0\right) \int_{V_{n,\overrightarrow{j}}\left(\overrightarrow{\tau} < t\right)} d\overrightarrow{\tau} Q_{j,\text{ seq }\overrightarrow{j}}^{J_{N},\text{ damage}}\left(t/\overrightarrow{\tau}\right), \tag{7}$$

where a stimuli vector J, each of its constituents being the stimulus associated to each event (.i.e. changes in j), has been added to the status vector j (constituents indicating the failed/not state of systems or appearing/not phenomena) to indicate the TSD state extension of eq. (3).

For instance, in the example above we may consider the events involved in Table 1 with constant, given values of the two delay transition rates, pfor the spray and SIS systems. Stimuli for all but the flammability event are considered activated from the start and deactivated as a result of the occurrence of the events themselves. Entering the flammability region for H2 concentration has been selected as the damage stimulus. As an alternate, we also consider the possibility of a pressure set-point stimulus activating the CHRS spray system.

Thus, to obtain the damage exceedance frequency, only the aggregate of those transient paths that, on the one hand, exceed a given amount of damage (or activate the damage stimulus) and, on the other, activate all the stimuli corresponding to the events necessary to transit from the initial j(0)headers status into the present one, j(t), are of interest.

 $V_{n,\overrightarrow{j}} \ (\tau_n < t),$ that groups all damage paths, is called the damage domain.

The essence of the treatment in the TSD method is then twofold.

1. To be able to filter-in only those paths that activate damage conditions and include consistent calls for system header interventions (i.e. the header stimulus ought to be activated, for instance a set point is exceeded prior to its corresponding event or conditions are fulfilled stimulating stochastic phenomena). Techniques for a systematic path screening treatment are then required.

Because damage paths are expected rare, it is of paramount importance to first find the damage domains, i.e. the event time combinations (each leading to a different transient/path) for which damage may occur and stimuli are activated.

2. Once the damage domain is found, each of the Q factors may be computed, for each damage path selected, by using the TSD expressions of the general theory, with all the required times (stimuli activation times for each set of times of the actual occurrence of the events of each given transient path) found with the techniques described in the section below. All damage paths with appropriate stimuli activations are selected and their frequencies aggregated. Montecarlo and discrete event simulation technology techniques may be appropriate to perform the aggregates.

This leads to necessarily perform a progressively refined analysis, using i/ simple dynamic models at initial stages and more detailed and computationally expensive models as the damage domain limits are more constrained ii/ earlier damage stimuli (conditions necessary to damage), should be activated before the next one, a condition that eliminates paths progressively, until the ultimate damage stimulus is reached. Fig. 1 presents a synthetic block diagram with the main flow structure of the paths analysis module and TSD methodology, in which several embedded loops can be distinguished. Note that the method may require different degree of detail in the model of the process variables evolution at different stages.



Figura 1: Flow diagram of the exceedance frequency computation

4. Numerical methods

Problem 1. How to optimize the search of damage domains

Assume an accident starting at steady state where n events changing the dynamics occur. Depending on the sojourn times in each dynamic state in-between events, the outcome may be damage or success. Damage is characterized by a given function of the process variables exceeding a critical value. Because the events are likely to be induced by the intervention of safety systems, the problem amounts to study when the mitigating measures arrive too late.

Assume the model to simulate the consequences is a high number set of ordinary non linear diff equations

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{f}_{\overrightarrow{j}_{n}(t)}\left(\overrightarrow{x}, i_{n}\left(t\right), \overrightarrow{u}_{n}\right),$$

where $\overrightarrow{f}_{j_n(t)}$ characterize the piecewise model in state $\overrightarrow{j}_n(t)$ during its sojourn time $\tau_n < t < \tau_{n+1}$ interval, $i_n(t)$ are boundary conditions and \overrightarrow{u}_n are the initial conditions coming from the preceding interval. For each combination of sojourn times, a different transient should be simulated. The set of all sojourn times combinations leading to damage is the damage domain.

The only difference from a simulation to another one are the sojourn times, the dynamic equations being always the same. We look for specific techniques that minimize the number of computer runs necessary to identify the damage domain. Below we illustrate the case of piecewise linear systems, where functions $\overrightarrow{f}_{jn(t)}$ are given by fixed matrices and some results of the CSN attempt for this case.

The evolution of the output, (in particular any stimuli variable such that exceeding a threshold will activate the stimuli), under the sequence of transitions, can be calculated by adding contributions from each component transmission function of a "transmission functions" matrix. In the case of three transitions, for instance, the output at a time τ since entering the third transition is given by calculating the value of the inverse Laplace transform at time τ (notation symbol $L\tau - 1$) with respect to s_3 and at the sojourn times ΔT_1 , ΔT_2 for the other two sojourn variables s_1 and s_2 as following:

$$output(\Delta T_1 + \Delta T_2 + \tau) = L_{\tau,\Delta T_2,\Delta T_1}^{-1} \left[FT_{31}(s_1, s_2, s_3)\tilde{i}_1(s_1) + FT_{32}(s_2, s_3)\tilde{i}_2(s_2) + FT_{33}(s_3)\tilde{i}_3(s_3) \right] + o_{initial}L_{\Delta T_1,\Delta T_2,\tau}^{-1} \left[FT_{30}(s_1, s_2, s_3)\tilde{i}_1(s_1) \right]$$

Each one of the transmission function components gives its contribution. Each dynamic state is represented by its linear matrices. The impact of past inputs into future outputs is then properly assessed. Techniques may be devised to pre-compute the transmission functions, so each path may be simulated via the inverse Laplace transform for different sojourn times. Moreover, techniques to ascertain the trend of every contribution towards damage or success may avoid many unnecessary computations.

Problem 2. Computation of the exceedance frequency

We would like to find optimum techniques to compute eq. (7) in the more general case where random stimuli events, conditioned by thresholds in process variables, alter the probabilities. In the example, the flammability condition. In general it amounts to efficiently compute large semiMarkov systems of the kind described by eq. (2) above, for situations where the path and sequences approach can not be used.

5. Conclusions

CSN is asking for the help of the academic community to find efficient numerical algorithms and exploit the peculiar nature of the protection engineering problems. The two problems described are well posed from a math standpoint, and are of a general nature, yet challenging from a dynamics and stochastic standpoint:

- Need of simulation of a large set of possible transients where the evolution differs only in timing of transitions. Need of special simulation tools and new numeric algorithms.
- Need of quick solutions for large inhomogeneous, semi-Markov systems.

Referencias

- Izquierdo J.M. et al. "SCAIS (simulation code system for integrated safety assessment):current status and applications". Safety, Reliability and Risk Analysis. Proceedings of the ESREL 2008 Conference. Volume 1, pp.121, Valencia, Spain Sept 22-25 2008.
- [2] Labeau P.E., Izquierdo J.M. 2004. "Modeling PSA problems. I The stimulus driven theory of probabilistic dynamics. II A cell-to-cell transport theory approach". NSE: 150,115-154, 2005.
- [3] Izquierdo J.M. 2007. "Development of the risk assessment and path analysis modules of the CSN-SCAIS safety code cluster". Safety, Reliability and Risk Analysis. Proceedings of the ESREL 2008 Conference. Volume 1, pp.163, Valencia, Spain Sept 22-25 2008.

- [4] Chaumont B. and Raymond E. "Specification of a benchmark exercise relative to hydrogen combustion for application of dynamic reliability methods". Sarnet Portal PSA2 Team site SARNET-PSA2-P12 - Rev: 0 Draft (2).
- [5] Izquierdo J.M., Cañamón I. "Conclusions of the development of the TSD-SDTPD dynamic reliability method. Application to the WP5.3 benchmark Level 2 PSA exercise". DSR/SAGR/FT 2004.074, SARNET PSA2 D117 Oct 2008.

Agradecimientos

El Comité Organizador desea agradecer todas las inestimables contribuciones de los ponentes de las empresas, los coordinadores académicos de las propuestas, así como de los participantes en los distintos grupos de trabajo, que han contribuido al éxito científico de este evento.

También desea expresar su gratitud a las diversas instituciones que han colaborado económicamente en su financiación: el Ministerio de Educación y Ciencia a través del Proyecto Ingenio Mathematica i-MATH del programa Consolider-Ingenio 2010; la Consellería de Educación e Ordenación Universitaria de la Xunta de Galicia a través de la Red Mathematica Consulting y Computing de Galicia y la Facultad de Matemáticas de la USC que cedió los locales para el desarrollo de las jornadas.

Por último, desea expresar su agradecimiento a los técnicos de Computing y Consulting del Nodo CESGA (María Teresa Sánchez Rúa y Giuseppe Viglialoro) que con su minucioso trabajo y dedicación han permitido el éxito organizativo de las Jornadas y que han contribuido directamente en la edición de este libro.



SUMARIO

Resolución numérica de topologías de bloques con realimentaciones anidadas	9
Comportamiento dinámico de tanques de gas licuado, con énfasis en la interacción fluido-estructura	21
Some mathematical problems that dominate the risk assessment and protection engineering of nuclear power tanks	31









